Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova di Geometria – 20 Gennaio 2017
Programma A.A. 2014/15 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*La democrazia vive se c'è un buon livello di cultura diffusa. Se questo non c'è, le istituzioni democratiche - pur sempre migliori dei totalitarismi e dei fascismi - sono forme vuote.*"
(T. De Mauro)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.
Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Le rette del piano affine $x - 2y + 1 = 0$ e $2x - y - 3 = 0$ sono

(a) perpendicolari.
(b) incidenti in un solo punto.
(c) coincidenti.
(d) parallele e distinte.

A2) È dato l'endomorfismo diagonalizzabile F di $\mathbb{R}^4$ che ha come autovalori 1 e 0 entrambi con molteplicità 2. Quale tra le seguenti è **falsa**?

(a) L'espressione generale di F può essere $F(x, y, z, t) = (x;\ y;\ 0;\ 0)$.
(b) Il nucleo di F è
$$\operatorname{Ker} F = \{(x, x, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + t = 0,\quad x - z + y = 0,\quad 2x - z + 3t = 0\}.$$
(c) Il sottospazio di $\mathbb{R}^4$
$$\{(x, x, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid F(x, y, z, t) = (-2x, -2y, -2z, -2t)\}$$
ha dimensione nulla.
(d) Il polinomio caratteristico di F è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda^3 + \lambda^4$.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Il sistema lineare

$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ -x - ky + z = 1 \\ x - y + z = (k-1) \end{cases}$$

V **F** è determinato per ogni valore di k.

V **F** ha una sola soluzione per $k = \log 4$.

V **F** è indeterminato per $k = -1$ e per $k = 3$.

V **F** ammette la soluzione nulla.

B2) Si consideri la curva algebrica piana

$$\mathscr{C}: \; x^3 - 2x^2y + x^2 - y^2 = 0.$$

V **F** La curva $\mathscr{C}$ ammette l'asintoto $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$.

V **F** Il gradiente di $\mathscr{C}$ è dato da

$$\nabla = (3x^2 - 4xy + 2x; \; -2x^2 - 2y).$$

V **F** Le rette passanti per l'origine intersecano $\mathscr{C}$ in al più due punti distinti.

V **F** La curva $\mathscr{C}$ ha tangente $x - 2y - 1 = 0$ nel punto $P = (-1, 0)$.

B3) È data la base ortonormale $\{u, \; v, \; w\}$ di $\mathbb{R}^3$. Allora

V **F** $\{u - w + v, \; (w \cdot u)v, \; w + 2u - v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** $\{u + w, \; v - 5\,\dfrac{u \cdot v}{u \cdot u}\,u, \; u \wedge v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** $\{u + v - w, \; u - v - w, \; u\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** Il vettore $u + 2v - 2w$ ha norma 3.

Esercizio 2. Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$U = \{(x, y, z, t) \mid x - y + t = 0\} \qquad \text{e} \qquad W = \mathcal{L}((1, 0, -1, 0),\ (1, 0, 1, 0),\ (1, -1, 1, 0))$$

(i) (**1pt**) Dire se U e W sono isomorfi.

(ii) (**3pt**) Determinare una base ortonormale e la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$.

(iii) (**1pt**) Può esistere un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ha U e W come immagine e nucleo rispettivamente?

(iv) (**1pt**) Può esistere un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ha U e W come autospazi associati a 0 e 1 rispettivamente?

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) (**3pt**) Provare che le matrici A, B e C ammettono gli stessi autovalori (contando le molteplicità algebriche).

(ii) (**3pt**) Quali tra le matrici A, B e C sono simili?

Esercizio 4. Sono dati i due piani

$$\pi: \ x + 2y + 2z + 4 = 0 \qquad \text{e} \qquad \sigma: \ x + 2y + 2z - 5 = 0.$$

(i) (**3pt**) Provare che i due piani sono paralleli e calcolarne la distanza.

(ii) (**3pt**) Determinare, se esiste, una retta passante per l'origine che interseca π in un punto A e σ in un punto B tali che $\overline{AB} = 10$.

Esercizio 5. È data la conica euclidea

$$\mathscr{C}: \ 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y - 1 = 0.$$

(i) (**2pt**) Si classifichi $\mathscr{C}$.

(ii) (**2pt**) Si determinino, se ne ammette, assi di simmetria, asintoti e centro di $\mathscr{C}$.

(iii) (**2pt**) Si trovi la forma canonica di $\mathscr{C}$ e si determini una isometria che trasforma $\mathscr{C}$ in essa.