Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova2 di Geometria – 20 Gennaio 2017
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"La democrazia vive se c'è un buon livello di cultura diffusa. Se questo non c'è, le istituzioni democratiche - pur sempre migliori dei totalitarismi e dei fascismi - sono forme vuote."
(T. De Mauro)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Si consideri la quadrica

$$\mathscr{Q}: \ 6xz + 8yz - 5x = 0.$$

Allora

(a) $\mathscr{Q}$ è un ellissoide a punti reali.
(b) $\mathscr{Q}$ è un paraboloide.
(c) $\mathscr{Q}$ è un ellissoide immaginario.
(d) $\mathscr{Q}$ è un iperboloide iperbolico.

A2) È dato l'endomorfismo diagonalizzabile F di $\mathbb{R}^4$ che ha come autovalori 1 e 0 entrambi con molteplicità 2. Quale tra le seguenti è vera?

(a) L'espressione generale di F può essere $F(x,y,z,t) = (x;\ y;\ x+y;\ x+y)$.
(b) Il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid F(x,y,z,t) = (-2x,-2y,-2z,-2t)\}$$

ha dimensione 2.
(c) L'immagine di F può essere il sottospazio

$$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+t=0,\quad x-z+y=0,\quad 2x-z+3t=0\}.$$

(d) Il polinomio caratteristico di F è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda^3 + \lambda^4 + 1$.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale k, è data la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$:

$$Q(x,y,z,t) = -2xz + z^2 + 2kxt - 2zt + kt^2$$

V **F** Per $k = 0$ la segnatura di Q è $(3,1)$.

V **F** Per $k = 2$, Q non definisce un prodotto scalare.

V **F** Per $k = 1$, il sottospazio $W = \{(x,y,z,t) \mid y - t = 0,\ z - t = 0\}$ ha sottospazio ortogonale $W^\perp$ rispetto a Q di dimensione 2.

V **F** Per $k = \sqrt{2 + 3\sqrt{5}}$ non esistono basi diagonalizzanti per Q.

B2) Si considerino la curva algebrica piana affine

$$\mathscr{C}:\ x^3 - 2x^2y + x^2 - y^2 = 0$$

e la sua chiusura proiettiva $\overline{\mathscr{C}}$.

V **F** La curva $\mathscr{C}$ ammette l'asintoto $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{8}$.

V **F** La molteplicità di intersezione tra la retta $r:\ x - 2y = 0$ e $\mathscr{C}$ nell'origine è 2.

V **F** La molteplicità di $\mathscr{C}$ nell'origine è 2.

V **F** Il gradiente omogeneo di $\overline{\mathscr{C}}$ è dato da

$$\nabla = (3X_1^2 - 4X_1X_2 + 2X_1X_0;\ -2X_1^2 - 2X_2X_0;\ X_1^2 + X_2^2).$$

V **F** Le rette passanti per l'origine intersecano $\mathscr{C}$ in al più due punti distinti.

V **F** La curva $\overline{\mathscr{C}}$ ha tangente $X_1 - 2X_2 + X_0 = 0$ nel punto $P = [1, 0, -1]$.

B3) È data la base ortonormale $\{u,\ v,\ w\}$ di $\mathbb{R}^3$. Allora

V **F** $\{3w + 2v,\ (u \cdot v)w,\ 2w + u - 2v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** $\{v \wedge u,\ v - 5\,\frac{u \cdot v}{u \cdot u}\,u,\ u + w\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$W = \{(x, y, z, t) \mid y - x - t = 0\} \qquad \text{e} \qquad U = \mathcal{L}((1,1,1,0),\ (1,0,1,0),\ (1,-1,1,0))$$

(i) (**1pt**) Dire se U e W sono isomorfi.

(ii) (**3pt**) Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$.

(iii) (**1pt**) Può esistere un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ha U e W come immagine e nucleo rispettivamente?

(iv) (**1pt**) Può esistere un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ha U e W come autospazi associati a 0 e 1 rispettivamente?

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) (**3pt**) Provare che le matrici A, B e C ammettono gli stessi autovalori (contando le molteplicità algebriche).

(ii) (**3pt**) Quali tra le matrici A, B e C sono simili?

Esercizio 4. Sono dati i due piani

$$\pi:\ 2x + 2y - z + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \sigma:\ 2x + 2y - z + 10 = 0.$$

(i) (**3pt**) Provare che i due piani sono paralleli e calcolarne la distanza.

(ii) (**3pt**) Costruire, se esiste, una sfera $\mathcal{S}$ tangente ai due piani π e σ ed avente il centro nel piano $\alpha:\ x + y - z - 2 = 0$.

Esercizio 5. Sono date la conica euclidea $\mathscr{C}$ e la conica proiettiva $\mathscr{D}$ di equazioni:

$$\mathscr{C}:\ 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathscr{D}:\ 4X_0^2 - 4X_1X_0 - 4X_2X_0 + X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 = 0.$$

(i) (**2pt**) Si classifichi $\mathscr{C}$ e si determini una isometria che la trasforma nella sua forma canonica euclidea.

(ii) (**2pt**) Determinare un cambiamento di coordinate proiettive che manda $\mathscr{D}$ nella sua forma canonica proiettiva.

(iii) (**2pt**) Stabilire se la chiusura proiettiva della conica $\mathscr{C}$ e la conica $\mathscr{D}$ hanno la stessa forma canonica proiettiva.

Esercizio Facoltativo. Quali sono le isometrie che trasformano in sé un piano tassellato interamente per mezzo di triangoli equilateri?