

**Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI**  
**Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17**  
**Prova AA precedenti – Geometria – 12 Gennaio 2018**  
**Prof. Cigliola**

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.
----	----	----	----	----	------

**N.B.** La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

*“Nessuno resta buono in questo mondo.”*  
(Superman)

**AVVERTENZE.** Non è consentito utilizzare, pena l’annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

**Esercizio 1.**

**Parte A.** Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata  $-1$  punto ed ogni risposta non data 0 punti.

**A1)** È data la matrice  $A$  quadrata di ordine 3 i cui elementi possono essere 0 oppure  $-2$ . Allora

- (a)  $A$  ha necessariamente rango 2.
- (b)  $A$  è necessariamente simmetrica.
- (c) il determinante di  $A$  è necessariamente un numero pari.
- (d)  $A$  ammette necessariamente l’autovalore nullo.

**A2)** Il triangolo di vertici  $A(1, 2, 1)$   $B(2, 1, 0)$  e  $C(-1, -1, -1)$

- (a) ha area di misura 3
- (b) giace nel piano di equazione  $x + y - 2z = 0$
- (c) è rettangolo
- (d) ha perimetro di misura 8

**Parte B.** Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

**B1)** Sono dati i due sottospazi di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad W : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- V**    **F** Entrambi  $U$  e  $W$  hanno dimensione 2.
- V**    **F**  $U \cap W$  ha dimensione 1.
- V**    **F**  $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ .
- V**    **F** Una base di  $W$  è data da  $\{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\}$ .

**B2)** Le rette  $r : 2x + ky = 2$  ed  $s : x - ky = 1$

- V**    **F** sono parallele per ogni valore di  $k$
- V**    **F** sono perpendicolari per  $k = \pm\sqrt{2}$
- V**    **F** sono coincidenti per  $k = -1$
- V**    **F** sono incidenti solo per  $k = 1$

**B3)** È data la base ortonormale  $\{u, v, w\}$  di  $\mathbb{R}^3$ . Allora

- V**    **F**  $\{u, v, v \wedge w\}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- V**    **F**  $\{2u, 2v, -w\}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- V**    **F**  $\{-u, -v, -w\}$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$ .
- V**    **F**  $\{u + v, u + w, v + w\}$  è una base ortogonale di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 2.** Al variare di  $k \in \mathbb{R}$  discutere e risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} kx + z = 1 \\ x + z = 1 \\ kx + kz = 2k \\ kx + y = k \end{cases}$$

**Esercizio 3.** Sia  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^4$ . Al variare di  $k \in \mathbb{R}$  è dato l'endomorfismo  $F$  di  $\mathbb{R}^4$  tale che

$$F(e_1) = e_2 \quad F(e_2) = e_1 + e_4 \quad F(e_3) = e_3 + ke_4 \quad F(e_4) = e_3 + ke_4.$$

- (a) **(1pt)** Per quali valori di  $k$  l'endomorfismo  $F$  è suriettivo?
- (b) **(2pt)** Al variare di  $k$ , calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di  $F$ .
- (c) **(2pt)** Posto  $k = 1$ , calcolare una base del nucleo e dell'immagine di  $F$ .
- (d) **(2pt)** Sia  $k = 1$ . Determinare, se esiste, una base di  $\mathbb{R}^4$  costituita da autovettori di  $F$ .

**Esercizio 4.** Sono date le rette

$$r : \begin{cases} x = -1 \\ y = z \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = y \\ z = 1. \end{cases}$$

- (i) **(2pt)** Determinare la posizione reciproca tra  $r$  ed  $s$ .
- (ii) **(2pt)** Calcolare la distanza tra  $r$  ed  $s$ .
- (iii) **(2pt)** Trovare, se esiste, un piano contenente  $r$  e perpendicolare ad  $s$ .

**Esercizio 5.** (a) **(2pt)** Determinare l'equazione della circonferenza  $\mathcal{C}$  avente per diametro i punti  $A(2, 3)$  e  $B(4, -1)$ .

- (b) **(1pt)** Calcolare l'area del triangolo di vertici  $A$ ,  $B$  e l'origine degli assi.
- (c) **(2pt)** Determinare le equazioni dei lati di un quadrato  $Q$  circoscritto a  $\mathcal{C}$ .
- (d) **(1pt)** Calcolare l'area del quadrato  $Q$ .