

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2018/19
Prova2 di Geometria – 11 Gennaio 2018
Prof. Cigliola

Nome:	Mat.:
-------	-------

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare - pena l'annullamento della prova - note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Giustificare esaurientemente ogni risposta data nello spazio adibito per ciascun esercizio. Non saranno accettati altri fogli.

Esercizio 1. Si considerino nello spazio euclideo i punti

$$A(1, 2, -1), \quad B(2, -1, 0) \quad C(1, 1, 1)$$

- (a) **(1pt)** Stabilire se il triangolo ABC è rettangolo.
- (b) **(1pt)** Calcolare il perimetro del triangolo ABC .
- (c) **(1pt)** Trovare equazioni cartesiane e parametriche della retta passante per A e C .
- (d) **(2pt)** Trovare, se esiste, una sfera che passa per i punti A e B ma non per il punto C .

Esercizio 2. Sono dati i due sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$W : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) **(2pt)** Calcolare basi e dimensioni di U e W .
- (b) **(2pt)** Verificare la formula di Grassmann per i sottospazi U e W .
- (c) **(1pt)** Stabilire se è vero che $U^\perp \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$.
- (d) **(1pt)** Calcolare una base ortonormale di W .

Esercizio 3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ è dato l'endomorfismo F di \mathbb{R}^4 tale che

$$F(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 0, 0) \quad F(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1) \quad F(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 1, k) \quad F(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, k).$$

- (a) **(1pt)** Per quali valori di k l'endomorfismo F è invertibile?
- (b) **(2pt)** Al variare di k , calcolare la dimensione del nucleo di F .
- (c) **(3pt)** Studiare la diagonalizzabilità di F al variare di k .

Esercizio 4. Siano date le rette

$$r : \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

- (i) **(1pt)** Stabilire se le rette r ed s sono complanari o meno.
- (ii) **(2pt)** Calcolare la distanza tra r ed s .
- (iii) **(1pt)** Costruire, se possibile, un piano contenente r e parallelo ad s .

Esercizio 5. (4pt) Al variare del parametro reale k , discutere e risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ 2kx + y = 0 \\ kz + x + ky = k \end{cases}$$

- Esercizio 6.** (a) (1pt) Dare la definizione di vettori ortogonali.
- (b) (2pt) Siano u e v vettori ortogonali. Stabilire se u e v sono linearmente indipendenti.
- (c) (2pt) Dare la definizione di operatore ortogonale, elencare le proprietà di un operatore ortogonale e dimostrarne alcune.
- (d) (2pt) Enunciare e dimostrare il teorema di classificazione della posizione reciproca tra due rette nel piano.