

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI  
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2018/19  
Prova2 di Geometria – 11 Gennaio 2018  
Prof. Cigliola

Nome:	Mat.:
-------	-------

**AVVERTENZE.** Non è consentito utilizzare - pena l'annullamento della prova - note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Giustificare esaurientemente ogni risposta data nello spazio adibito per ciascun esercizio. Non saranno accettati altri fogli.

**Esercizio 1.** Si considerino nello spazio euclideo i punti

$$A(1, 2, -1), \quad B(2, -1, 0) \quad C(1, 1, 1)$$

- (a) **(1pt)** Stabilire se il triangolo  $ABC$  è rettangolo.
- (b) **(1pt)** Calcolare il perimetro del triangolo  $ABC$ .
- (c) **(1pt)** Trovare equazioni cartesiane e parametriche della retta passante per  $A$  e  $C$ .
- (d) **(2pt)** Trovare, se esiste, una sfera che passa per i punti  $A$  e  $B$  ma non per il punto  $C$ .

**Esercizio 2.** Sono dati i due sottospazi di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$W : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) **(2pt)** Calcolare basi e dimensioni di  $U$  e  $W$ .
- (b) **(2pt)** Verificare la formula di Grassmann per i sottospazi  $U$  e  $W$ .
- (c) **(1pt)** Stabilire se è vero che  $U^\perp \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$ .
- (d) **(1pt)** Calcolare una base ortonormale di  $W$ .

**Esercizio 3.** Al variare di  $k \in \mathbb{R}$  è dato l'endomorfismo  $F$  di  $\mathbb{R}^4$  tale che

$$F(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 0, 0) \quad F(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1) \quad F(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 1, k) \quad F(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, k).$$

- (a) **(1pt)** Per quali valori di  $k$  l'endomorfismo  $F$  è invertibile?
- (b) **(2pt)** Al variare di  $k$ , calcolare la dimensione del nucleo di  $F$ .
- (c) **(3pt)** Studiare la diagonalizzabilità di  $F$  al variare di  $k$ .

**Esercizio 4.** Siano date le rette

$$r : \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

- (i) **(1pt)** Stabilire se le rette  $r$  ed  $s$  sono complanari o meno.
- (ii) **(2pt)** Calcolare la distanza tra  $r$  ed  $s$ .
- (iii) **(1pt)** Costruire, se possibile, un piano contenente  $r$  e parallelo ad  $s$ .

**Esercizio 5.** (4pt) Al variare del parametro reale  $k$ , discutere e risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ 2kx + y = 0 \\ kz + x + ky = k \end{cases}$$

**Esercizio 6.** (a) (1pt) Dare la definizione di vettori ortogonali.

(b) (2pt) Siano  $u$  e  $v$  vettori ortogonali. Stabilire se  $u$  e  $v$  sono linearmente indipendenti.

(c) (2pt) Dare la definizione di operatore ortogonale, elencare le proprietà di un operatore ortogonale e dimostrarne alcune.

(d) (2pt) Enunciare e dimostrare il teorema di classificazione della posizione reciproca tra due rette nel piano.