

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2018/19
Prova1 di Geometria – 11 Gennaio 2018
Prof. Cigliola

Nome:	Mat.:
-------	-------

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare - pena l'annullamento della prova - note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Giustificare esaurientemente ogni risposta data.

Esercizio 1. Si considerino nello spazio euclideo i punti

$$A(1, 2, -1), \quad B(2, -1, 0) \quad C(1, 1, 1)$$

- (a) (1pt) Stabilire se il triangolo ABC è isoscele.
- (b) (1pt) Calcolare l'area del triangolo ABC .
- (c) (1pt) Trovare equazioni cartesiane e parametriche del piano in cui giace il triangolo ABC .
- (d) (2pt) Trovare, se esiste, una sfera che passa per i punti A , B e C .

Esercizio 2. Sono dati i due sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad W : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- (a) (2pt) Calcolare basi e dimensioni di U e W .
- (b) (2pt) Verificare la formula di Grassmann per i sottospazi U e W .
- (c) (1pt) Stabilire se è vero che $U^\perp \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$.
- (d) (1pt) Calcolare una base ortonormale di W .

Esercizio 3. È dato l'endomorfismo F di \mathbb{R}^4 tale che

$$F(1, 0, 0, 0) = (0, 1, 0, 0) \quad F(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1) \quad F(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 1, k) \quad F(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, k).$$

- (a) (1pt) Per quali valori di k l'endomorfismo F è suriettivo?
- (b) (2pt) Al variare di k , calcolare la dimensione dell'immagine di F .
- (c) (3pt) Studiare la diagonalizzabilità di F al variare di k .

Esercizio 4. (4pt) Classificare e portare in forma canonica la conica euclidea

$$\mathcal{C} : x^2 - 4xy - 2y^2 + 2x - 1 = 0$$

illustrando le isometrie usate.

Esercizio 5. Sia data la forma quadratica Q su \mathbb{R}^4 tale che

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 2x_3x_4.$$

- (i) (1pt) Stabilire se Q risulta degenere.
- (ii) (2pt) Calcolare una base di Sylvester per Q .
- (iii) (1pt) Calcolare la segnatura di Q .

Esercizio 6. (a) (1pt) Dare la definizione di vettore isotropo per una forma quadratica.

- (b) (2pt) Siano u e v vettori isotropi non ortogonali per una forma quadratica Q su uno spazio vettoriale V . Il vettore somma $u + v$ è isotropo?
- (c) (2pt) Dare la definizione di operatore ortogonale, elencare le proprietà di un operatore ortogonale e dimostrarne alcune.
- (d) (2pt) Enunciare e dimostrare il Teorema di Cramer.