Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. precedenti
Prova di Geometria – 24 Giugno 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	FAC.:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome	Matricola

"Per tre punti passa una sola retta."
(On. De Maio, Vicepresidente della Camera)

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sono dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y - z = y + z = 0\}$$
$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + z = y - x = 0\}.$$

Allora

(a) $U = \mathcal{L}((3,1,1),(1,0,0))$.
(b) $U^\perp = \mathcal{L}((1,2,-1),(0,1,1))$.
(c) Si ha che $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.
(d) Risulta che $(0,-1,0) \in U \cap U^\perp \cap W$.

A2) Sono date nello spazio le rette:

$$r: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

(a) Le rette r ed s sono parallele.
(b) Le rette r, s e t sono complanari.
(c) Le rette s e t sono sghembe.
(d) Le rette r e s sono complanari.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile. Si sa che -1 e 2 sono suoi autovalori di molteplicità rispettivamente 1 e 2. Inoltre è dato che $f(e_1 + e_2) = -e_1 - e_2$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Può capitare che $f(e_1 - e_2) = \mathbf{0}$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Può capitare che $f(e_1) = -e_1$ e che $f(e_2) = 2e_2$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Può capitare che $f(e_1 - e_2) = 2e_1 + e_3$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ L'endomorfismo f è suriettivo.

B2) Sono dati nel piano i punti

$$A(1,1) \qquad B(4,1) \qquad C(5,2) \qquad D(3,2).$$

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ L'area del quadrilatero $ABCD$ vale $\frac{5}{2}$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = 3$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Il quadrilatero $ABCD$ è un rettangolo.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ I punti A, B e C non sono allineati.

B3) Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = x + 2y + z = 0\}$$

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Lo spazio U ha dimensione 2.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Si ha che U è generato dai vettori $u = (1,0,-1,0)$, $v = (0,0,0,1)$ e $w = (-2,0,2,-2)$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Lo spazio U non contiene vettori ortogonali al vettore $a = (1,1,-1,0)$.

$\boxed{\mathbf{V}}$ $\boxed{\mathbf{F}}$ Risulta che lo spazio $U^\perp$ ha dimensione tre.

Esercizio Facoltativo. Sia $k \in \mathbb{R}$. Un endomorfismo f non nullo di $\mathbb{R}^3$ ha polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + k^2).$$

(a) Per quali valori di k si ha che f è iniettivo?

(b) Per quali valori di k si ha che f è surgettivo?

(c) Stabilire se esistono valori di k per cui f è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Discutere e risolvere, al variare del parametro reale h, il seguente sistema lineare in tre equazioni nelle quattro incognite X_1, X_2, X_3, X_4:

$$\begin{cases} X_2 + hX_3 = 1 \\ (h-1)X_1 + X_3 = 0 \\ -X_2 + hX_4 = h \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri l'endomorfismo $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, associato rispetto alla base canonica alla matrice $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(a) (**1pt**) Calcolare esplicitamente $F(a,b,c)$, per un generico vettore $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

(b) (**1pt**) Dato il sottospazio $U=\mathcal{L}((0,0,1))$, provare che $F(U)=\mathcal{L}((1,-2,0))$.

(c) (**1pt**) Calcolare la controimmagine $F^{-1}(1,0,0)$.

(d) (**1pt**) Verificare che $F^3=0$.

(e) (**1pt**) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(F)$ e di $\mathrm{Im}(F)$ e stabilire se

$$\mathrm{Ker}(F)\oplus\mathrm{Im}(F)=\mathbb{R}^3.$$

(f) (**1pt**) Stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia k un parametro reale. Siano dati nello spazio euclideo il punto P, la retta r ed il piano π_k dove:

$$P=(1,9,-3) \qquad r:\begin{cases}x+y-1=0\\ x-y-6z=-9\end{cases} \qquad \pi_k:\ kx+3y-z=2k.$$

(a) (**1.5 pt**) Calcolare la distanza di P da r.

(b) (**2pt**) Per quali valori di k si ha che r e π_k sono paralleli? Calcolare in tal caso la loro distanza. Per quali k invece sono ortogonali?

(c) (**1pt**) Determinare un piano contenente P ed r.

(d) (**1.5 pt**) Al variare di k, determinare in π_k una retta sghemba con r e passante per il punto $Q(2,0,0)$.

Esercizio 5. Si considerino la conica euclidea reale

$$\mathscr{C}:\ 2x^2-2xy+2y^2+1=0$$

e la conica proiettiva reale

$$\mathscr{C}':\ 2X_0^2+X_1^2-X_2^2+3X_0X_1+X_0X_2=0.$$

(a) (**1.5pt**) Classificare la conica $\mathscr{C}$ e trovare una sua forma canonica euclidea $\mathscr{C}_0$.

(b) (**1.5pt**) Determinare un'isometria che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}_0$ e classificare tale isometria.

(c) (**1.5pt**) Stabilire se esiste un'immersione del piano affine nel piano proiettivo che trasforma la conica $\mathscr{C}$ nella conica $\mathscr{C}'$.

(d) (**1.5pt**) Trovare una forma canonica proiettiva di $\mathscr{C}'$.