Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova di Geometria – 20 Giugno 2016
Programma 2014/15 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*Se non ti mobiliti per difendere i diritti di qualcuno che in quel momento ne è privato, quando poi intaccheranno i tuoi, nessuno si muoverà per te. E ti ritroverai solo*"
(H. Milk)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.
Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sia A una matrice quadrata di ordine 39 con elementi uguali ad 0 oppure -1. Allora

(a) A^3 non può essere invertibile.
(b) A può avere al massimo rango 38.
(c) A non può ammettere l'autovalore nullo.
(d) nessuna delle precedenti è vera.

A2) I piani

$$\pi_1 : \ x + y - z + 1 = 0 \qquad \pi_2 : \ y + z = 0 \qquad \pi_3 : \ 2x - y + z + 5 = 0$$

sono tali che

(a) π_1 e π_2 sono paralleli.
(b) π_1 e π_2 sono perpendicolari e π_2 e π_3 sono paralleli.
(c) π_1, π_2 e π_3 sono paralleli.
(d) π_1, π_2 e π_3 sono a due a due perpendicolari.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata −0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale k, sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$W: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 - kx_2 - kx_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad U = \mathcal{L}((1,1,1,0),\ (0,0,0,0),\ (k,0,0,k))$$

V **F** Per $k = 2$ gli spazi W e U sono a somma diretta.

V **F** Lo spazio U ha dimensione 2 per ogni valore di $k \neq 0$.

V **F** Per $k = -1$ si ha che $W \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$.

V **F** Per $k = 1$ lo spazio $U \cap W^\perp$ ha dimensione 1.

B2) Si consideri la curva algebrica piana

$$\mathscr{C}: \ (x+y)xy + x^2 + y^2 = 0.$$

V **F** La curva $\mathscr{C}$ non interseca gli assi.

V **F** La curva $\mathscr{C}$ ammette per asintoti gli assi cartesiani e la bisettrice $y = x$.

V **F** La curva $\mathscr{C}$ ha un punto singolare isolato.

V **F** La curva $\mathscr{C}$ ha grafico limitato.

B3) La circonferenza

$$\mathscr{C}: \ x^2 + y^2 - x + 2y - 3 = 0$$

V **F** interseca tutte le rette passanti per il punto $(1; -1)$.

V **F** ha raggio $r = 1$.

V **F** ha centro nel punto $(\frac{1}{2}; -1)$.

V **F** stacca sulla retta $y = x$ una corda di misura $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

Esercizio 2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, discutere e risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} kx + 2z = 1 \\ 2x + y = 1 \\ (2k+2)x + z = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, è dato l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$F(e_1) = \big(-k, k, 0, 0\big) \qquad F(e_2) = \big(0, 1, 0, 0\big) \qquad F(e_3) = \big(1, 0, 1, k-1\big) \qquad F(e_4) = \big(-k, k, 0, k\big)$$

dove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(i) (**1pt**) Determinare la controimmagine di $v = \big(1, 1, 0, -1\big)$ al variare di k.

(ii) (**1pt**) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di F al variare di k.

(iii) (**1pt**) Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di F al variare di k.

(iv) (**3pt**) Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo F è diagonalizzabile e determinare una base diagonalizzante in corrispondenza di uno di tali valori.

Esercizio 4. Nello spazio sono date le rette

$$r : \begin{cases} x - z = 1 - 2y \\ z = 2y \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} y + z = 1 + x \\ z = x \end{cases}$$

(i) (**2pt**) Stabilire la posizione reciproca tra r ed s.

(ii) (**2pt**) Calcolare la distanza tra r ed s.

(iii) (**2pt**) Determinare, se esiste, un piano perpendicolare ad r che contiene s.

Esercizio 5. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, sia data la famiglia di coniche

$$\mathscr{F} : kx^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

(i) (**1pt**) Provare che la famiglia $\mathscr{F}$ è costituita da coniche tutte degeneri.

(ii) (**1pt**) Classificare al variare di k le coniche della famiglia $\mathscr{F}$.

(iii) (**4pt**) Studiare in tutti i dettagli la conica che si ottiene per $k = 4$.