Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. precedenti
Prova di Geometria – 14 Luglio 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	FAC.:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

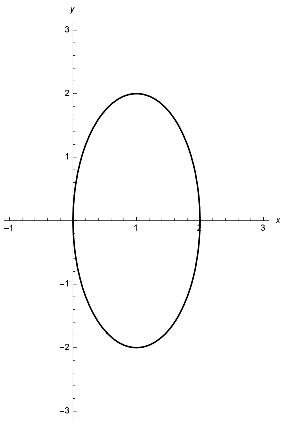
Nome	Matricola

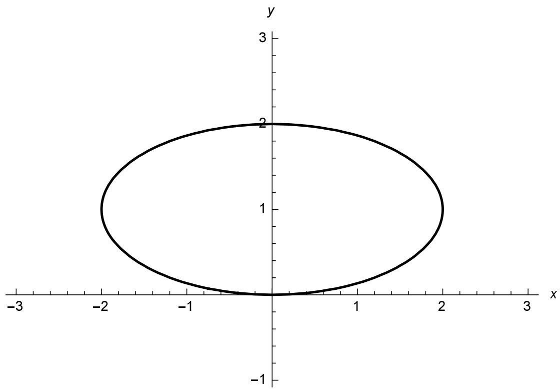
"Oggi niente di nuovo."
(dal diario personale di Luigi XVI, 14 Luglio 1798)

Esercizio 1.

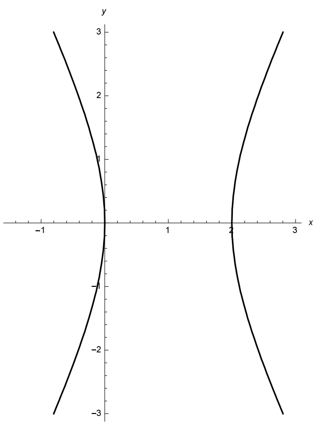
Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

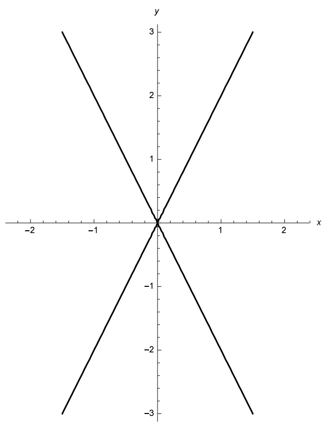
A1) Quale tra i seguenti è il grafico della curva $\mathscr{C}: \ x^2 + 4y^2 - 8y = 0$?


(a)



(b)


(c)


(d)

A2) Si consideri la conica proiettiva $\mathscr{C}: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_0X_1 - 2X_0X_2 = 0$. A quale delle seguenti coniche $\mathscr{C}$ è proiettivamente equivalente?

(a) $\mathscr{C}': X_0^2 + X_1^2 = 0$.
(b) $\mathscr{C}': 2X_0^2 + 2X_1^2 + 2X_2^2 = 0$.
(c) $\mathscr{C}': 2X_0^2 + 2X_1^2 - 2X_2^2 = 0$.
(d) $\mathscr{C}': X_0^2 = 0$.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Siano A e B due matrici simmetriche di ordine 3.

V **F** La matrice $A - B$ è diagonalizzabile.
V **F** La matrice B^2 è simmetrica.
V **F** La matrice $A + 2B + I_3$ ha almeno un autovalore reale.
V **F** La matrice AB è simmetrica.

B2) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Siano poi E ed F due sottospazi di V di dimensione 3.

V **F** Sia ha che $\dim(E + F) \geqslant 3$.
V **F** Risulta che $\dim(E + F) = 4$.
V **F** Risulta che $\dim(E \cap F) = 0$.
V **F** Risulta che $\dim(E \cap F) > 2$.

B3) Siano dati nel piano il punto $P(-1, 2)$ e la retta $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 3t. \end{cases}$

V **F** La distanza di P da r vale $\frac{3}{10}$.
V **F** La retta parallela ad r passante per P ha equazione $3x + y - 1 = 0$.
V **F** La circonferenza di centro P e raggio 1 incontra r in due punti distinti.
V **F** La retta passante per P e perpendicolare ad r ha equazione $x - 3y - 6 = 0$.

Esercizio Facoltativo. Siano date r ed s due rette nello spazio con vettori direzionali rispettivamente v_r e v_s. Siano poi R un punto di r ed S un punto della retta s. Si dimostri che le rette r ed s sono sghembe se e solo se il prodotto misto $\overrightarrow{RS} \cdot (v_r \wedge v_s) = 0$.

Esercizio 2. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ed il sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(a) (**1pt**) Determinare una base e la dimensione di U.

(b) (**2pt**) dimostrare che l'insieme

$$W = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, AX = XB\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si determini una sua base e la sua dimensione.

(c) (**2pt**) Determinare una base e la dimensione di $U + W$ e di $U \cap W$.

(d) (**1pt**) Determinare un sottospazio V di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che $W \oplus V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. (a) Un'applicazione lineare diagonalizzabile $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha per autovalori 0 e 1 con autospazi associati:

$$E(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = x + y + z = 0\}$$

$$E(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 2x + 2y + 2z = 0\}$$

Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) È data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinare, se esistono, una matrice ortogonale M ed una matrice diagonale D tali che $D = M^T A M$.

Esercizio 4. Siano date le tre rette:

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 3x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ y - 2z - 5 = 0. \end{cases}$$

Classificare la posizione reciproca delle tre rette prese a due a due. Si determini il piano che le contiene se sono complanari, il punto comune se sono incidenti, la retta di minima distanza se sono sghembe.

Esercizio 5. Si consideri la conica euclidea

$$\mathscr{C}:\ xy + x + y - 1 = 0.$$

(a) (**1pt**) Classificare $\mathscr{C}$ e determinare una sua forma canonica $\mathscr{C}_0$.

(b) (**1pt**) Stabilire se $\mathscr{C}$ è una conica a centro e in caso affermativo determinarne il centro.

(c) (**1pt**) Stabilire se $\mathscr{C}$ ammette asintoti ed in caso affermativo li si determinino.

(d) (**1pt**) Trovare una isometria f che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}_0$.

(e) (**1pt**) Dati i punti $A(-1,-1)$, $B(2,-3)$ e $C(2,1)$, si determini l'area del triangolo di vertici $f(A)$, $f(B)$ e $f(C)$.

(f) (**1pt**) Si disegni la conica $\mathscr{C}$.