

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova2 di Geometria – 13 Luglio 2016
Programma 2015/16 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.
----	----	----	----	----	------

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

“I patrioti non scappano quando le cose diventano difficili. Restano.”
(J.C. Junker)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l’annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sia A una matrice. Si sa che A e A^T sono linearmente dipendenti. Allora

- (a) A non ha rango massimo.
- (b) A ammette l’autovalore nullo.
- (c) A è la matrice identica.
- (d) nessuna delle precedenti è vera in generale.

A2) La conica $\mathcal{C} : x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 1 = 0$

- (a) è una iperbole degenera.
- (b) ha forma canonica affine data da $X^2 - Y^2 = 0$.
- (c) è una parabola generale.
- (d) ha chiusura proiettiva di forma canonica $X_1^2 + X_2^2 = X_0^2$.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale k , sono dati in \mathbb{R}^4 i sottospazi

$$W : x_1 - x_2 - x_3 + (k+1)x_4 = 0 \quad \text{e} \quad U = \mathcal{L}((1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (2, -1, 0, k))$$

- V** **F** Per $k = -1724$ si ha che $W^\perp \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$.
- V** **F** Lo spazio W ha dimensione 2 per ogni valore di k .
- V** **F** Per $k = 19$ lo spazio $U \cap W^\perp$ ha dimensione 1.
- V** **F** Per $k = 2\sqrt{5} + \sqrt{7}$ gli spazi W e U non sono a somma diretta.

B2) È data nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ la circonferenza $S : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = -1 \end{cases}$

Allora la circonferenza S

- V** **F** ha raggio $2\sqrt{2}$.
- V** **F** è contenuta nella quadrica $z = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}y^2$.
- V** **F** ha centro nel punto $(0, 0, 1)$.
- V** **F** è tangente al piano $\pi : y = 2$.

B3) La quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 3z^2 + xy + yz + 2 = 0$

- V** **F** passa per il punto $(0, 0, 1)$.
- V** **F** contiene punti a coordinate tutte intere.
- V** **F** interseca tutti i piani di tipo $x = k$, con $k \in \mathbb{R}$.
- V** **F** è un iperboloide.

Esercizio 2. Sono dati nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ i due piani $\pi_1 : x + y + z = 0$ e $\pi_2 : x - y = 0$.

- (i) **(2pt)** Esibire una retta r contenuta in π_1 ed una retta s contenuta in π_2 tali che $r \parallel s$.
- (ii) **(2pt)** Determinare la sfera avente centro sul piano π_2 e tangente al piano π_1 nel punto $P(1, 1, -2)$.
- (iii) **(2pt)** Trovare nel piano π_1 tre punti che determinano un triangolo di area 1.

Esercizio 3. È data su \mathbb{R}^4 la forma quadratica

$$Q(x, y, z, t) = y^2 + (t - y)^2 + (x - z)^2.$$

(i) (**1pt**) Determinare la matrice associata a Q rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

(ii) (**1pt**) Determinare rango e segnatura di Q .

(iii) (**1pt**) Determinare una base diagonalizzante per Q .

(iv) (**1pt**) Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione del sottospazio ortogonale rispetto a Q di

$$W = \mathcal{L}((1, -1, 1, 0), (1, k, 0, -k))$$

(v) (**1pt**) Trovare una base di Sylvester per Q .

(vi) (**1pt**) Dimostrare che ogni base diagonalizzante per Q contiene necessariamente un vettore del tipo $(\alpha, 0, \alpha, 0)$, per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, è dato l'endomorfismo $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

- (i) (**2pt**) Determinare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine di F al variare del parametro k .
- (ii) (**2pt**) Per quali valori di k si ha $\text{Ker } F \oplus \text{Im } F = \mathbb{R}^4$?
- (iii) (**2pt**) Determinare, se esiste, per $k = 0$ una base ortonormale di \mathbb{R}^4 costituita da autovettori per F .

Esercizio 5. Si consideri la curva algebrica piana

$$\mathcal{C}: y^3 + x^2y + x^2 - 2y^2 = 0.$$

- (i) (**1pt**) Scrivere l'equazione della chiusura proiettiva di \mathcal{C} rispetto ad X_0 .
- (ii) (**1pt**) Determinare i punti singolari di \mathcal{C} e i relativi complessi tangenti.
- (iii) (**1pt**) Trovare gli asintoti di \mathcal{C} .
- (iv) (**1pt**) Determinare i punti impropri di \mathcal{C} .
- (v) (**2pt**) Tracciare il grafico di \mathcal{C} .