Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova di Geometria – 3 Luglio 2017
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"L'unione dell'Europa mi ha riconciliata con il XX Secolo."
(Simone Veil)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sono date la matrice A di tipo 15×20 di rango 7, e una matrice B di tipo 20×15. Quale tra le seguenti può verificarsi?

(a) La matrice AB ha determinante uguale a 4.

(b) La matrice AB ha rango 1.

(c) La matrice $B^T A^T$ ammette autovalori tutti non nulli.

(d) La matrice $B^T A^T$ ha rango 8.

A2) La conica

$$\mathscr{C}: \ 2x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$$

(a) è vuota.

(b) è degenere.

(c) è una parabola non degenere.

(d) non ha centro di simmetria.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Sono dati i polinomi

$$p_1(x) = 2x^2 - x + 1 \qquad p_2(x) = -x^2 + x + 1, \qquad p_3(x) = x + 1.$$

V **F** I tre polinomi dati sono linearmente indipendenti.

V **F** I tre polinomi dati presi assieme al polinomio $q(x) = x^2+x+1$, costituiscono un insieme di vettori linearmente indipendenti.

V **F** Si ha che i polinomi $p_1(x) + p_2(x)$ e $p_2(x) - 2p_3(x)$ sono linearmente dipendenti.

V **F** I tre polinomi dati formano una base di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$.

B2) Sono dati nello spazio euclideo i punti $A(1,-1,2)$, $B(1,-1,2)$, $C(2,0,1)$ e $D(0,0,0)$.

V **F** Il triangolo ABC è equilatero.

V **F** Il triangolo ABD ha area di misura nulla.

V **F** I punti A, B, C e D sono allineati.

V **F** I punti A, B, C e D sono complanari.

B3) Sono dati i punti proiettivi

$$P[1,-1,0] \qquad Q[-1,-1,2]$$

e la retta proiettiva

$$r: \ 2X_1 - 2X_2 + 3X_0 = 0.$$

V **F** La retta passante per P e Q è la retta impropria.

V **F** Non esistono rette passanti per P e incidenti ad r.

V **F** La retta che contiene P e Q interseca r.

V **F** Il punto Q appartiene ad r.

Esercizio 2. Si cerca un endomorfismo F di $\mathbb{R}^4$ con le seguenti proprietà:

- $\operatorname{Ker} F = \{(x,y,z,t) \in R^4 \mid x - 2y + z = 0, \quad 2x + 2z - t = 0\}$;
- il vettore $v = (1,-1,0,-1)$ è autovettore per F associato all'autovalore $\lambda = -1$;
- $F(1,0,0,0) = (1,-1,0,1)$.

Si risponda alle seguenti questioni.

(i) (**1pt**) Spiegare perché un endomorfismo con tali proprietà sicuramente esiste.

(ii) (**2pt**) Scrivere la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(iii) (**1pt**) Dire se F è simmetrico.

(iv) (**1pt**) Stabilire se F è un endomorfismo ortogonale.

(v) (**1pt**) Determinare l'immagine sotto F del sottospazio $U = \mathcal{L}((1,1,1,1),(1,2,-1,2))$.

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia data la forma quadratica Q su $\mathbb{R}^4$ tale che

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2kx_1x_3 - x_2^2 - 2kx_2x_4.$$

Sia poi dato il sottospazio vettoriale

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_3 - x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}.$$

(i) (**1pt**) Determinare i valori di k per cui Q è degenere.

(ii) (**2pt**) Determinare, al variare di k, la dimensione del sottospazio ortogonale di U fatto rispetto a Q.

(iii) (**3pt**) Diagonalizzare Q al variare di k.

Esercizio 4. Sono dati nello spazio la retta r ed il piano π di equazioni:

$$r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \pi: \ x + y - z - 1 = 0.$$

(i) (**1pt**) Classificare la posizione reciproca tra r e π e calcolarne la distanza.

(ii) (**2pt**) Costruire, se esiste, una sfera tangente sia a π che ad r.

(iii) (**3pt**) Portare in forma canonica e classificare la quadrica

$$\mathcal{Q}: \ x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2 + 2x = 0.$$

Esercizio 5. Si consideri la curva algebrica piana affine

$$\mathscr{C}: \ x^2 - xy^2 + 2x - y = 0.$$

(i) (**1pt**) Scrivere l'equazione della chiusura proiettiva di $\mathscr{C}$ rispetto ad X_0.

(ii) (**1pt**) Determinare i punti impropri di $\mathscr{C}$.

(iii) (**1pt**) Calcolare gli (eventuali) asintoti di $\mathscr{C}$.

(iv) (**1pt**) Stabilire se $\mathscr{C}$ è una curva singolare.

(v) (**2pt**) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.