

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Programma A.A. precedenti – Prova di Geometria
3 Luglio 2017 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.
----	----	----	----	----	------	------

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

“L’unione dell’Europa mi ha riconciliata con il XX Secolo.”
(Simone Veil)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l’annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sono date la matrice A di tipo 15×20 di rango 7, e una matrice B di tipo 20×15 . Quale tra le seguenti può verificarsi?

- (a) La matrice AB ha determinante uguale a 4.
- (b) La matrice AB ha rango 1.
- (c) La matrice $B^T A^T$ ammette autovalori tutti non nulli.
- (d) La matrice $B^T A^T$ ha rango 8.

A2) La conica

$$\mathcal{C} : 2x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$$

- (a) è vuota.
- (b) è degenere.
- (c) è una parabola non degenere.
- (d) non ha centro di simmetria.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Sono dati i polinomi

$$p_1(x) = 2x^2 - x + 1 \quad p_2(x) = -x^2 + x + 1, \quad p_3(x) = x + 1.$$

- V** **F** I tre polinomi dati sono linearmente indipendenti.
- V** **F** I tre polinomi dati presi assieme al polinomio $q(x) = x^2 + x + 1$, costituiscono un insieme di vettori linearmente indipendenti.
- V** **F** Si ha che i polinomi $p_1(x) + p_2(x)$ e $p_2(x) - 2p_3(x)$ sono linearmente dipendenti.
- V** **F** I tre polinomi dati formano una base di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

B2) Sono dati nello spazio euclideo i punti $A(1, -1, 2)$, $B(1, -1, 2)$, $C(2, 0, 1)$ e $D(0, 0, 0)$.

- V** **F** Il triangolo ABC è equilatero.
- V** **F** Il triangolo ABD ha area di misura nulla.
- V** **F** I punti A, B, C e D sono allineati.
- V** **F** I punti A, B, C e D sono complanari.

B3) Sono date le trasformazioni del piano

$$f : \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g : \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

- V** **F** La trasformazione $f \circ g$ non è un'isometria.
- V** **F** La trasformazione g è un endomorfismo di \mathbb{R}^2 .
- V** **F** Si ha che $f \circ g = g \circ f$.
- V** **F** La trasformazione $f^2 = f \circ f$ è biunivoca.

Esercizio 2. Si cerca un endomorfismo F di \mathbb{R}^4 con le seguenti proprietà:

- $\text{Ker } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z = 0, \quad 2x + 2z - t = 0\}$;
- il vettore $v = (1, -1, 0, -1)$ è autovettore per F associato all'autovalore $\lambda = -1$;
- $F(1, 0, 0, 0) = (1, -1, 0, 1)$.

Si risponda alle seguenti questioni.

- (i) **(1pt)** Spiegare perché un endomorfismo con tali proprietà sicuramente esiste.
- (ii) **(2pt)** Scrivere la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^4 .
- (iii) **(1pt)** Dire se F è simmetrico.
- (iv) **(1pt)** Stabilire se F è un endomorfismo ortogonale.
- (v) **(1pt)** Determinare l'immagine sotto F del sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 1, 1, 1), (1, 2, -1, 2))$.

Esercizio 3. Al variare di k in \mathbb{R} , discutere e risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y + t = 0 \\ (k - 1)y + z - t = k^2 + 3k \\ 6z + (k + 5)t = 0 \\ 2x + 3y + z + 2t = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4. Sono dati nello spazio la retta r ed il piano π di equazioni:

$$r : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases} \quad \pi : x + y - z - 1 = 0.$$

- (i) **(2pt)** Classificare la posizione reciproca tra r e π e calcolarne la distanza.
- (ii) **(2pt)** Costruire, se esiste, una retta parallela a π e incidente r .
- (iii) **(2pt)** Portare in forma canonica e classificare la conica

$$\mathcal{C} : 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8x = 0; .$$

Esercizio 5. Si consideri la curva algebrica piana affine

$$\mathcal{C} : x^2 - xy^2 + 2x - y = 0.$$

- (i) **(2pt)** Calcolare gli (eventuali) asintoti di \mathcal{C} .
- (ii) **(2pt)** Stabilire se \mathcal{C} è una curva singolare.
- (iii) **(2pt)** Tracciare il grafico di \mathcal{C} .