Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2018/19
ProvaM di Geometria – 8 Febbraio 2019
Prof. Cigliola

Nome:	Mat.:

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare - pena l'annullamento della prova - note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Giustificare esaurientemente ogni risposta data.

Esercizio 1. Si considerino nello spazio euclideo i piani

$$\pi : 3x - 2y - 2z + 1 = 0 \qquad\qquad \sigma : x + y - z - 3 = 0.$$

(a) (**1pt**) Stabilire la posizione reciproca tra i due piani.

(b) (**2pt**) Calcolare una sfera tangente ad entrambi i piani.

(c) (**1pt**) Determinare una retta perpendicolare a π e incidente σ.

(d) (**2pt**) Dire se esiste una retta sghemba con $r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$ e parallela a σ.

Esercizio 2. Sono dati i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad\qquad W : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) (**2pt**) Calcolare basi e dimensioni di U e W.

(b) (**2pt**) Calcolare basi e dimensioni di $U + W$ e $U \cap W$.

(c) (**1pt**) Stabilire se è vero che $U^\perp \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$.

(d) (**1pt**) Calcolare una base ortonormale di W.

Esercizio 3. È data l'applicazione lineare F da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^4$ tale che

$F(1,0,0,0) = (0,1,1,-1) \qquad F(0,1,0,0) = (2,2,-1,0) \qquad F(0,0,1,0) = (1,-3,-2-1) \qquad F(0,0,0,1) = (1,1,-1,1).$

(a) (**1pt**) Stabilire se F è iniettiva, suriettiva, invertibile.

(b) (**2pt**) Calcolare basi e dimensioni di nucleo e immagine di F.

(c) (**2pt**) Trovare un vettore che ha controimmagine vuota secondo F.

Esercizio 4. (**4pt**) Si consideri la circonferenza:

$$C : x^2 + y^2 - 3x + 2y - 4 = 0.$$

(a) (**1pt**) Calcolare centro e raggio di C.

(b) (**2pt**) Inscrivere un quadrato in C.

(c) (**2pt**) Circoscrivere un quadrato a C.

Esercizio 5. (**3pt**) Discutere e risolvere, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + kz = 0 \\ k^2x - ky + kz = 0 \\ x - y + z = k \end{cases}$$

Esercizio 6. (a) (**3pt**) Enunciare e dimostrare il teorema di Rouché-Capelli.

(b) (**2pt**) Dare la definizione di nucleo di un'applicazione lineare e dimostrare che è un sottospazio vettoriale.

(c) (**2pt**) Dare la definizione di operatore ortogonale ed elencarne alcune proprietà.