Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova di Geometria – 30 Marzo 2016
Programma AA precedenti – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"Di solito la mia risposta a qualsiasi problema è una scelta tra le seguenti: ha ragione lui; sposalo; fate un figlio; obbediscigli; fate un figlio; trasferisciti nella sua città; perdonalo; cerca di capirlo; e infine fate un figlio. Se lo ami lascia che faccia l'uomo e smetti di dargli ordini."
(Costanza Miriano, da "Sposati e sii sottomessa")

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.
Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sia A la matrice quadrata di ordine 10 con elementi tutti uguali ad 1. Sia B la matrice di tipo 10×23 che ha gli elementi b_{52} e b_{97} uguali ad 1 e tutte le altre entrate nulle. Allora

(a) AB ha le colonne linearmente indipendenti.
(b) A^{100} ha le righe linearmente indipendenti.
(c) AB ha rango 1.
(d) la matrice AB non è definita.

A2) Sia data la conica $\mathscr{C}:\ 1 + 5x + 6x^2 - 3y - 7xy + 2y^2 = 0$.

(a) $\mathscr{C}$ è una conica di tipo ellittico.
(b) $\mathscr{C}$ ha per asintoto la retta $3x - 2y + 1 = 0$.
(c) $\mathscr{C}$ è una conica senza centro.
(d) $\mathscr{C}$ ha centro nel punto $(\frac{1}{3}, 0)$.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale k, sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$W = \mathcal{L}((1,k,1,k),(0,-1,0,2k),(1,-1,1,k^2))$$

e

$$U = \mathcal{L}((-1,-1,1,0),\ (k,0,0,2k),\ (-1,2,0,k))$$

V **F** Si ha che $\dim(U + W^\perp) < 6$, per $k = -23$.

V **F** Per $k = 0$ abbiamo che $W + U^\perp = \mathbb{R}^4$.

V **F** Per $k = 1$ lo spazio $U \cap W^\perp$ è banale.

V **F** Per $k = 1$ gli spazi U e $W^\perp$ sono a somma diretta.

B2) Sono dati nello spazio i punti $A = (0,0,-k)$, $B = (1,1,0)$ e $C = (2,-1,1-k)$.

V **F** I punti A, B e C sono complanari per $k = \frac{7}{3}$.

V **F** I punti A, B e C sono allineati per $k = -1$.

V **F** La retta passante per A e B è perpendicolare al piano $\pi:\ x - 2y - z + \sqrt{3} = 0$ per $k = 2$.

V **F** Il valore minimo che assume l'area del triangolo ABC è $3\sqrt{\frac{3}{10}}$.

B3) Sia F un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^4$ che ammette come autovalori 1 e 0.

V **F** Può capitare che $F(1,6,-2,1) = (1,2,3,4)$; $F(1,1,-1,-1) = (1,1,-1,-1)$ e che $F(1,1,1,1) = (0,0,0,0)$.

V **F** Può capitare che $F(1,1,2,3) = (1,2,3,4)$; $F(1,1,-1,-1) = (1,2,3,4)$ e che $F(1,2,3,4) = (1,2,3,4)$.

V **F** Può capitare che $F(1,1,1,1) = (-2,-2,-2,-2)$ e che $F(1,-1,1,-1) = (2,1,-3,0)$.

V **F** Può capitare che $F(1,1,0,0) = (0,0,0,0)$; $F(1,1,-1,-1) = (1,1,-1,-1)$ e che $F(1,1,1,1) = (0,0,0,0)$.

Esercizio 2. Discutere e risolvere il sistema lineare seguente al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x - y + z = k \\ (k-3)x - y + z = 0 \\ (k-2)x + 2z = k \\ (k-1)x - y + 3z = 2k \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia dato uno spazio vettoriale reale V e sia $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ una sua base. Al variare del parametro reale h, considerare l'endomorfismo f di V tale che

$$f(v_1) = h\,v_1 + 4h\,v_3 \qquad f(v_2) = v_1 + v_2 \qquad f(v_3) = -v_2 + (h-1)v_3.$$

(i) (**1pt**) Determinare la dimensione del nucleo di f al variare di h.

(ii) (**1pt**) Determinare una base dell'immagine di f al variare di h.

(iii) (**1,5pt**) Decidere della diagonalizzabilità di f quando questo ammette l'autovalore -1.

(iv) (**1,5pt**) Preso $v = x\,v_1 + y\,v_2 + z\,v_3 \in V$, determinare l'espressione di $f^{-1}(v)$ per $h = 1$.

(v) (**1pt**) Provare che per ogni $v \in V$ si ha che $f^3(v) = f(v)$ quando $h = 0$.

Esercizio 4. (i) (**3pt**) Nel piano $\pi :\ x - y = -2$ si determini una retta sghemba con la retta passante per $A(1,-1,1)$ e $B(-1,0,1)$.

(ii) (**3pt**) Nello spazio euclideo si consideri il piano $\pi :\ x - y - 2z + 8 = 0$. Si determinino i piani π_1 e π_2 aventi distanza $\sqrt{6}$ da π.

Esercizio 5. Classificare la conica:

$$\mathscr{Q} :\ x^2 + y^2 - 2xy + 2x = 1.$$

Determinare inoltre la sua forma canonica euclidea $\mathscr{C}_0$ ed una isometria che la trasforma in essa.