Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova2 di Geometria – 30 Marzo 2016
Programma 2015/16 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*Di solito la mia risposta a qualsiasi problema è una scelta tra le seguenti: ha ragione lui; sposalo; fate un figlio; obbediscigli; fate un figlio; trasferisciti nella sua città; perdonalo; cerca di capirlo; e infine fate un figlio. Se lo ami lascia che faccia l'uomo e smetti di dargli ordini.*"
(Costanza Miriano, da "Sposati e sii sottomessa")

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sia A la matrice quadrata di ordine 87 con elementi tutti uguali ad 1. Sia B la matrice di tipo 87×85 che ha gli elementi $b_{35,\,33}$ e $b_{18,\,37}$ uguali ad 1 e tutte le altre entrate nulle. Allora

(a) A^{17} è invertibile.
(b) $(AB)^T$ ha rango 1.
(c) AB ha rango 2.
(d) non è definito il rango di AB.

A2) Sia data la conica $\mathscr{C}:\ x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$.

(a) $\mathscr{C}$ può essere trasformata per mezzo di un'affinità nella conica di equazione $xy + 117 = 0$.
(b) $\mathscr{C}$ è degenere.
(c) $\mathscr{C}$ ha centro nel punto $(1, -1)$.
(d) $\mathscr{C}$ ha per asintoto la retta $x + 3y + 1 = 0$.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale k, sono dati in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$W = \mathcal{L}((1,k,1,k),(0,1,0,-2k),(1,-1,1,k^2),(0,0,0,0)$$

e

$$U = \mathcal{L}((-1,-1,1,0),\ (k,0,0,2k),\ (-1,2,0,k))$$

V **F** Lo spazio U è definito dall'equazione cartesiana $x_4 = 0$, per $k = 0$.

V **F** Per $k = 0$ si ha $W \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^4$.

V **F** Per $k = 1$ lo spazio $W^{\perp} \cap U$ è banale.

V **F** Si ha che $\dim(U + W^{\perp}) \leqslant 5$, per $k = 123$.

B2) Sono dati nello spazio i punti $A = (0,0,-k)$, $B = (1,1,0)$ e $C = (2,-1,1-k)$.

V **F** La retta passante per A e C è perpendicolare al piano $\pi:\ x+y+z+\sqrt{3} = 0$ per $k = 0$.

V **F** I punti A, B e C sono allineati per $k = 0$.

V **F** Il valore minimo che assume l'area del triangolo ABC è $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{6}{5}}$.

V **F** I punti A, B e C sono complanari per $k = -\frac{14}{5}$.

B3) Sia F un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^4$ che ammette come autovalori 0 ed 1.

V **F** Può capitare che $F(1,6,-2,1) = (1,2,3,4)$; $F(1,1,-1,-1) = (1,1,-1,-1)$ e che $F(1,1,1,1) = (0,0,0,0)$.

V **F** Può capitare che $F(1,1,1,1) = (2,2,2,2)$ e che $F(1,-1,1,-1) = (2,1,-3,0)$.

V **F** Può capitare che $F(1,-1,-2,3) = (1,2,3,4)$; $F(1,1,-1,-1) = (1,2,3,4)$ e che $F(1,2,3,4) = (1,2,3,4)$.

V **F** Può capitare che $F(1,1,0,0) = (0,0,0,0)$; $F(1,1,-1,-1) = (1,1,-1,-1)$ e che $F(1,1,1,1) = (0,0,0,0)$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale k, si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + k(x_3 - x_2)^2 - k(x_1 - x_4)^2$$

Sia dato poi il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$W = \mathcal{L}((-1,-1,0,0),\ (0,0,0,1),\ (0,1,1,0)).$$

(i) (**1,5pt**) Al variare di k, determinare la dimensione del sottospazio ortogonale $W^\perp$ fatto rispetto a Q.

(ii) (**1,5pt**) Per quali valori di k i sottospazi W e $W^\perp$ sono a somma diretta?

(iii) (**1,5pt**) Determinare rango e segnatura di Q al variare di k.

(iv) (**1,5pt**) Al variare di k si trovi una base diagonalizzante per Q.

Esercizio 3. Sia dato uno spazio vettoriale reale V e sia $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ una sua base. Al variare del parametro reale h, considerare l'endomorfismo f di V tale che

$$f(v_1) = h\,v_1 + 4h\,v_3 \qquad f(v_2) = v_1 + v_2 \qquad f(v_3) = -v_2 + (h-1)v_3.$$

(i) (**1pt**) Determinare la dimensione dell'immagine di f al variare di h.

(ii) (**1pt**) Determinare una base del nucleo di f al variare di h.

(iii) (**1pt**) Provare che per ogni $v \in V$ si ha che $f^3(v) = f(v)$ quando $h = 0$.

(iv) (**1,5pt**) Preso $v = x\,v_1 + y\,v_2 + z\,v_3 \in V$, determinare l'espressione di $f^{-1}(v)$ per $h = 1$.

(v) (**1,5pt**) Decidere della diagonalizzabilità di f per i valori di h per cui -1 è autovalore di f.

Esercizio 4. (i) (**2pt**) Portare in forma canonica e classificare la quadrica:

$$\mathscr{Q}:\ x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2y = 0.$$

(ii) (**2pt**) Nello spazio euclideo si consideri il piano $\pi:\ x - y - 2z + 8 = 0$. Si determinino i piani π_1 e π_2 aventi distanza $\sqrt{6}$ da π.

(iii) (**2pt**) Determinare la sfera tangente a π_1 e π_2 e tangente in $A(0, 8, \sqrt{6})$ al piano $\alpha:\ z = \sqrt{6}$.

Esercizio 5. Sia data la curva algebrica proiettiva $\mathscr{C} : X_0X_1X_2 = 2X_1^3 + X_1X_0^2 + X_0^3$.

(i) (**1pt**) Dire se $\mathscr{C}$ è una curva liscia.

(ii) (**1pt**) Determinare la tangente a $\mathscr{C}$ in $P[-1, 2, 1]$.

(iii) (**1pt**) Determinare i punti impropri di $\mathscr{C}$ e le relative tangenti.

(iv) (**3pt**) Tracciare il grafico della parte affine di $\mathscr{C}$ (rispetto ad X_0).