

Nome:	Mat.:
-------	-------

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare - pena l'annullamento della prova - note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Giustificare esaurientemente ogni risposta data.

Esercizio 1. Si considerino nello spazio euclideo i punti

$$A(-1, -2, 1), \quad B(2, -1, 0) \quad C(1, 1, 2), \quad D(1, -3, 1)$$

- (a) **(1pt)** Stabilire se il triangolo ABD è isoscele.
- (b) **(1pt)** Calcolare l'area del triangolo ABD .
- (c) **(1pt)** Trovare equazioni cartesiane e parametriche del piano in cui giace il triangolo ADC .
- (d) **(2pt)** Dire se esiste una sfera che passa per i punti A, B, C e D .

Esercizio 2. Sono dati i due sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad W : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) **(2pt)** Calcolare basi e dimensioni di U e W .
- (b) **(2pt)** Calcolare basi e dimensioni di $U + W$ e $U \cap W$.
- (c) **(1pt)** Stabilire se è vero che $U^\perp \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$.
- (d) **(1pt)** Calcolare una base ortonormale di W .

Esercizio 3. È dato l'endomorfismo F di \mathbb{R}^4 tale che

$$F(1, 0, 0, 0) = (1, 1, -1, -1) \quad F(0, 1, 0, 0) = (0, 2, 0, 0) \quad F(0, 0, 1, 0) = (-3, -1, -1, 1) \quad F(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 3).$$

- (a) **(1pt)** Stabilire se F è invertibile.
- (b) **(2pt)** Calcolare basi e dimensioni di nucleo e immagine di F .
- (c) **(2pt)** Calcolare autovalori ed autovettori di F .

Esercizio 4. Siano fissati $A(2, -1)$ e $B(-3, 1)$. Si consideri l'insieme \mathcal{C} dei punti P del piano per cui i vettori \overrightarrow{AP} e \overrightarrow{BP} sono ortogonali.

- (i) Provare che \mathcal{C} è una circonferenza.
- (ii) Calcolare equazione, raggio e centro di \mathcal{C} .
- (iii) Determinare i vertici di un quadrato circoscritto a \mathcal{C} .