

**Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI**  
**Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2014/15**  
**Prova1 di Geometria – 12 Novembre 2015**  
**Prof. Cigliola**

1)	2)	3)	4)	5)	Tot
----	----	----	----	----	-----

**N.B.** La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome:	Nome:
----------	-------

**Esercizio 1.**

**Parte A.** Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata  $-1$  punto ed ogni risposta non data 0 punti.

**A1)** Si consideri la conica  $\mathcal{C} : x^2 + xy + y^2 + x - y - 3 = 0$ . Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (a)  $\mathcal{C}$  è una conica senza centro.
- (b)  $\mathcal{C}$  è unione di due rette.
- (c)  $\mathcal{C}$  è una conica di tipo ellittico.
- (d) Il grafico di  $\mathcal{C}$  è vuoto.

**A2)** Sono date due matrici simmetriche  $A$  e  $B$ . Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

- (a) Risulta che  $AB$  è simmetrica.
- (b) Si ha che  $BA$  è una matrice invertibile.
- (c) La matrice  $-A^T$  è una matrice antisimmetrica.
- (d) Nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

**Parte B.** Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

**B1)** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione 4. Siano poi  $U$  e  $W$  sottospazi di  $V$  di dimensione 3.

**V**    **F**    $\dim(U + W) > 3$ .

**V**    **F**    $2 \leq \dim U \cap W \leq 3$ .

**V**    **F**    $U$  e  $W$  sono isomorfi.

**V**    **F**    $U$  e  $W$  non possono essere spazi a somma diretta.

**B2)** Si consideri la curva algebrica

$$\mathcal{C} : x^3 - y^3 + xy - 1 = 0.$$

**V**    **F**   La curva  $\mathcal{C}$  è simmetrica rispetto all'asse  $x$ .

**V**    **F**   La curva  $\mathcal{C}$  non passa per l'origine.

**V**    **F**    $\mathcal{C}$  è una curva liscia.

**V**    **F**   La curva  $\mathcal{C}$  ammette un unico asintoto.

**B3)** Sono dati nel piano i punti  $A(-1, 1)$ ,  $B(0, -1)$  e  $C(2, 0)$ .

**V**    **F**   Il triangolo  $ABC$  è scaleno.

**V**    **F**   L'area del triangolo  $ABC$  vale 1.

**V**    **F**   I punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sono allineati.

**V**    **F**   Non esiste alcuna circonferenza che passa per i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

**Esercizio 2.** Si considerino i sottospazi  $U$  e  $W$  di  $\mathbb{R}^4$  così definiti:

$$U : \begin{cases} x - y + 2z + w = 0 \\ 2x + y + 2z + w = 0 \\ 3y - 2z - w = 0 \end{cases}$$

$$W : \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare una base ortonormale di  $U$ .

(b) Determinare il complemento ortogonale di  $W$ .

(c) Determinare una base e la dimensione di  $U \cap W$  e  $U + W$ .

(d) Trovare equazioni parametriche e cartesiane per  $U + W$ .

**Esercizio 3.** È data l'applicazione lineare  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  associata alla matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$  rispetto alla base canonica.

- (a) Determinare la dimensione ed una base di  $\text{Ker } F$  e  $\text{Im } F$ .
- (b) Dire se  $F$  è iniettiva o suriettiva.
- (c) Stabilire se  $F$  è diagonalizzabile ed in caso affermativo trovare una base di  $\mathbb{R}^3$  di autovettori per  $F$ .
- (d) Trovare la matrice di  $F$  rispetto alla base  $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ .

**Esercizio 4.** Sono dati nello spazio i punti  $A(1, 2, -3)$ ,  $B(-2, 1, 1)$  e  $C(2, 1, -3)$  e la retta  $s : \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z. \end{cases}$

- (a) Determinare il piano  $\pi$  passante per  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
- (b) Determinare in  $\pi$  una retta parallela ad  $\vec{AB}$  che incide la retta  $s$ .
- (c) Calcolare l'area del triangolo  $ABC$ .

**Esercizio 5.** Discutere e risolvere al variare di  $k \in \mathbb{R}$  il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ ky + z = 0 \\ 2x - kz = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$