**Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI**
**Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2014/15**
**Prova2 di Geometria – 12 Novembre 2015**
**Prof. Cigliola**

| 1) | 2) | 3) | 4) | 5) | Tot |
|---|---|---|---|---|---|

**N.B.** La parte sovrastante è riservata al docente.

| Cognome: | Nome: |
|---|---|

**Esercizio 1.**

**Parte A.** Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

**A1)** Si consideri la conica $\mathscr{C}: \ x^2 + xy + y^2 + x - y - 3 = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) $\mathscr{C}$ è unione di due rette.
(b) $\mathscr{C}$ è una conica senza centro.
(c) Il grafico di $\mathscr{C}$ è vuoto.
(d) $\mathscr{C}$ è una conica di tipo ellittico.

**A2)** Sono date due matrici simmetriche $A$ e $B$. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(a) Risulta che $AB$ è antisimmetrica.
(b) Si ha che $BA$ non è necessariamente una matrice invertibile.
(c) La matrice $-A^T$ è una matrice simmetrica.
(d) Nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

**Parte B.** Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data $0$ punti.

**B1)** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione 4. Siano poi $U$ e $W$ sottospazi di $V$ di dimensione 3.

**V** **F** $\dim(U+W) \geqslant 3$.

**V** **F** $2 < \dim U \cap W < 3$.

**V** **F** $U$ e $W$ non sono isomorfi.

**V** **F** $U$ e $W$ non possono essere spazi a somma diretta.

**B2)** Si consideri la conica

$$\mathscr{C}: \ x^2 + y^2 + x - 2y - 10 = 0.$$

**V** **F** $\mathscr{C}$ è una circonferenza.

**V** **F** Il centro di $\mathscr{C}$ è il punto $(-\frac{1}{2}, 1)$

**V** **F** $\mathscr{C}$ ha raggio 1.

**V** **F** $\mathscr{C}$ passa per l'origine.

**B3)** Sono dati nel piano i punti $A(-1,1)$, $B(0,-1)$ e $C(2,0)$.

**V** **F** I triangolo $ABC$ è scaleno.

**V** **F** L'area del triangolo $ABC$ vale 1.

**V** **F** I punti $A$, $B$, $C$ sono allineati.

**V** **F** Non esiste alcuna circonferenza che passa per i punti $A$, $B$ e $C$.

**Esercizio 2.** Si considerino i sottospazi $U$ e $W$ di $\mathbb{R}^4$ così definiti:

$$W: \begin{cases} x - y + 2z + w = 0 \\ 2x + y + 2z + w = 0 \\ 3y - 2z - w = 0 \end{cases}$$

$$U: \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare una base ortonormale di $W$.

(b) Determinare il complemento ortogonale di $U$.

(c) Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$ e $U + W$.

(d) Trovare equazioni parametriche e cartesiane per $U \cap W$.

**Esercizio 3.** È data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) Determinare la dimensione ed una base di $\operatorname{Ker} F$ e $\operatorname{Im} F$.

(b) Dire se $F$ è iniettiva, suriettiva, invertibile.

(c) Stabilire se $F$ è diagonalizzabile ed in caso affermativo trovare una base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per $F$.

**Esercizio 4.** Sono dati nello spazio i punti $A(1, 2, -3)$, $B(-2, 1, 1)$ e $C(2, 1, -3)$ e la retta $s : \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z. \end{cases}$

(a) Determinare il piano $\pi$ passante per $A$, $B$ e $C$.

(b) Determinare in $\pi$ una retta parallela ad $\overrightarrow{AB}$ che incide la retta $s$.

(c) Calcolare l'area del triangolo $ABC$.

**Esercizio 5.** Discutere e risolvere al variare di $h \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 1 \\ hy + z = 0 \\ 2x - hz = -1 \end{cases}$$