Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. precedenti
Prova di Geometria – 11 Settembre 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Cognome:	Nome:

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sono date due matrici simmetriche A e B tali che $AB = BA$. Quale tra le seguenti affermazioni è falsa?

(a) Risulta che $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.
(b) Si ha che anche BA è una matrice simmetrica.
(c) La matrice A^2B è una matrice simmetrica.
(d) Nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

A2) Si consideri la conica $\mathscr{C}: 2x^2 - xy - 7x - y^2 - 2y + 3 = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) $\mathscr{C}$ è una conica senza centro.
(b) Il grafico di $\mathscr{C}$ è vuoto.
(c) $\mathscr{C}$ è unione di due rette.
(d) $\mathscr{C}$ è una conica di tipo ellittico.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Si consideri la conica proiettiva

$$\mathscr{C}: \; X_0X_1 + X_1X_2 - X_0X_2 = 0.$$

V **F** $\mathscr{C}$ è degenere.

V **F** Una forma canonica di $\mathscr{C}$ è $\mathscr{C}_0: \; X_0^2 = 0$.

V **F** Deomogenizzando $\mathscr{C}$ rispetto ad X_0 si ottiene una conica di tipo iperbolico.

V **F** La conica $\mathscr{C}$ è proiettivamente equivalente alla conica proiettiva $\mathscr{C}': \; X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 + 4X_1X_2 = 0$.

B2) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Siano poi $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V, $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ un sistema di generatori di V ed u un vettore di V.

V **F** I vettori w_1, w_2, w_3, w_4 sono linearmente indipendenti.

V **F** $\dim \mathcal{L}(v_1, w_2, w_3, w_4) = 4$.

V **F** $\dim \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3, w_4, u) = 5$.

V **F** $\dim \mathcal{L}(w_1, w_2, w_3, u) = \dim \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, u)$.

B3) È dato nel piano il triangolo di vertici $A(2,0)$, $B(0,2)$ e $C(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

V **F** I triangolo ABC è inscritto nella circonferenza $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

V **F** L'area del triangolo ABC vale 1.

V **F** L'angolo $A\hat{C}B$ misura $45°$.

V **F** Il triangolo ABC è equilatero.

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi U e W di $\mathbb{R}^5$ così definiti:

$$U = \mathcal{L}((0,0,1,1,0),\ (0,0,0,0,0),\ (0,-1,0,-1,0),\ (1,1,0,0,1))$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x_1 + x_2 - x_4 = x_1 - x_2 - x_5 = 0\}.$$

(a) (**1pt**) Determinare una base ortogonale di U.

(b) (**2pt**) Spiegare perché U e W sono isomorfi e costruire esplicitamente un isomorfismo tra essi.

(c) (**2pt**) Determinare una base e la dimensione di $U \cap W$ e $U + W$.

(d) (**1pt**) Costruire una base ortonormale di $U + W$.

Esercizio 3. È data l'applicazione $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 - x_4,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4,\ x_1 + 2x_2 - x_3,\ 0).$$

(a) (**2pt**) Determinare la dimensione ed una base di $\operatorname{Ker} F$ e $\operatorname{Im} F$.

(b) (**2pt**) Stabilire se F è diagonalizzabile.

(c) (**2pt**) Trovare, se esiste, un endomorfismo G di $\mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Ker} G = \operatorname{Im} F$ e $\operatorname{Im} G = \operatorname{Ker} F$.

Esercizio 4. Si considerino nello spazio i tre piani:

$$\alpha : \ x - 2y - z + 2 = 0 \qquad \beta : \ 2x - 4y - 2z - 1 = 0 \qquad \gamma : \ y + z + 1 = 0.$$

(a) (**1pt**) Determinare se esistono tutte le rette passanti per l'origine e parallele sia ad α che a β. Quante sono tali rette?

(b) (**1pt**) Esistono rette perpendicolari sia ad α che a β?

(c) (**1pt**) Determinare se esistono tutte le rette passanti per l'origine e parallele sia ad α che a γ. Quante sono tali rette?

(d) (**1pt**) Esistono rette perpendicolari sia ad α che a γ?

(e) (**1pt**) Determinare, se esiste, una retta che giace nel piano α e perpendicolare a γ.

(f) (**1pt**) Trovare in γ due rette parallele.

Esercizio 5. Si consideri la conica euclidea

$$\mathscr{C} : \ xy - 1 = 0.$$

(a) (**1pt**) Classificare $\mathscr{C}$ e determinare una sua forma canonica $\mathscr{C}_0$.

(b) (**1pt**) Stabilire se $\mathscr{C}$ è una conica a centro e in caso affermativo determinarne il centro.

(c) (**1pt**) Stabilire se $\mathscr{C}$ ammette asintoti ed in caso affermativo li si determinino.

(d) (**1pt**) Trovare un'isometria f che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}_0$ e classificare tale isometria.

(e) (**1pt**) Trovare, se esiste, una isometria che trasforma la conica $\mathscr{C}$ nella conica

$$\mathscr{C}' : \ xy - 2 = 0.$$

(f) (**1pt**) Trovare, se esiste, una isometria che trasforma la conica $\mathscr{C}$ nella conica

$$\mathscr{C}' : \ xy + 1 = 0.$$

Esercizio 5. Alternativo. (**10pt**) Sia $\mathscr{I}$ un'iperbole non degenere. Dimostrare che l'area del triangolo compreso tra i due asintoti di $\mathscr{I}$ e la tangente in un punto di $\mathscr{I}$ è costante (non dipende cioè dalla scelta del punto di $\mathscr{I}$).