

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI  
 Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16  
 Prova2 di Geometria – 12 Settembre 2016  
 Programma 2015/16 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	6)
----	----	----	----	----	----

**N.B.** La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

**Esercizio 1.** È dato uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione 3 con base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ . Si consideri l'endomorfismo  $F$  di  $V$  tale che

$$F(v_1) = v_1 + v_2 - v_3 \qquad F(v_2) = 2v_1 + v_3 \qquad F(v_3) = 3v_1 + v_2.$$

- (a) Determinare una base dell'immagine e del nucleo di  $F$ .
- (b) Dire se  $F$  è diagonalizzabile.
- (c) Calcolare la controimmagine del vettore  $v_1 + v_2 + v_3$ .

**Esercizio 2.** Portare in forma canonica e classificare la quadrica  $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - y = 0$ .

**Esercizio 3.** Considerare la curva algebrica  $\mathcal{C} : y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x$ .

- (a) Determinare i punti impropri di  $\mathcal{C}$ .
- (b) Provare che  $\mathcal{C}$  è una curva liscia.
- (c) Dimostrare che  $\mathcal{C}$  non ammette asintoti.
- (d) Calcolare la retta tangente a  $\mathcal{C}$  in  $P(3, \sqrt{6})$ .
- (e) Tracciare il grafico di  $\mathcal{C}$ .

**Esercizio 4.** Al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , discutere e risolvere il sistema lineare: 
$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1. \\ kz = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 5.** Si consideri la matrice simmetrica  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Calcolare rango e segnatura di  $A$ .
- (b) Determinare una base di Sylvester per  $A$ .
- (c) Trovare, se esiste, un vettore isotropo non banale per  $A$ .

**Esercizio 6.** Sono dati i sottospazi  $U = \mathcal{L}(x^2 - 2x, -x + 2)$  e  $W = \{ax^2 + bx + c \mid a + b - 2c = 0\}$  di  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ .

- (a) Calcolare la dimensione ed una base di  $U \cap W$  e  $U + W$ .
- (b) Completare una base di  $U \cap W$  ad una base di  $U + W$ .
- (c) Dire se  $U \oplus W = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ .