Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova di Geometria – 18 Settembre 2017
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*Di tutte le scienze la più assurda, a parer mio, e la più capace di soffocare qualsiasi genio, è la Geometria. Questa scienza ridicola ha per oggetto superfici, linee e punti inesistenti in natura. Si fanno passare in teoria centomila linee curve fra un cerchio e una retta tangente, per quanto in realtà non potrebbe passarvi un fuscello. È veramente uno scherzo di cattivo genere.*"
(Voltaire)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) È dato uno spazio vettoriale S di dimensione 19. Siano $v_1,\ v_2,\ \dots, v_{10}$ dei vettori linearmente indipendenti di S. Siano poi $u_1, u_2, \dots, u_{18}$ dei vettori di S. Si chiamino infine V il sottospazio generato dai v_i e U il sottospazio generato dagli u_j.

(a) La dimensione di $U + V$ vale almeno 10.
(b) La dimensione di $U \cap V$ vale almeno 10.
(c) U ha dimensione minore o uguale a 17.
(d) I sottospazi U e V sono a somma diretta.

A2) La quadrica

$$\mathscr{Q}:\ x^2 - 2y^2 + 6yz - 2z^2 + 2x - 3 = 0$$

(a) è vuota.
(b) è un ellissoide.
(c) è un paraboloide a sella.
(d) è un iperboloide a una falda.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) È dato un endomorfismo simmetrico F di $\mathbb{R}^4$, con autovalori $0, 1$ e -1. Si sa inoltre che il suo nucleo è il sottospazio

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_4 = 0,\ x_1 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

V **F** Gli autovalori di F sono tutti semplici.

V **F** $F(1,1,0,1) = (1,1,0,1)$.

V **F** Può capitare che $(1,1,1,1) \in E(1)$.

V **F** F è invertibile.

B2) Sono dati nel piano euclideo i punti $A(3,3)$, $B(-2,-1)$ e $C(-1,-2)$. Sia M il punto medio del segmento BC.

V **F** Il triangolo ABC è equilatero.

V **F** Il triangolo ABC ha area di misura $\frac{9}{2}$.

V **F** Si ha che $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$.

V **F** Si ha che $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

B3) Sono dati i punti proiettivi

$$P[1,-1,1] \qquad Q[0,3,1] \qquad R[1,2,0].$$

V **F** Il punto Q è improprio.

V **F** I punti P, Q ed R sono allineati.

V **F** La retta proiettiva passante per P e Q ha equazione $2X_1 - X_2 + 3X_0 = 0$.

V **F** Non esiste alcuna retta proiettiva passante per Q ed R.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3. Sia $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ una base ortonormale di V. È dato l'endomorfismo F di V tale che

$$F(v_1) = kv_1 + v_2 \qquad F(v_2) = v_1 + kv_2 \qquad F(v_3) = 2v_1 + kv_2 + v_3,$$

con k parametro reale.

(i) (**1pt**) Calcolare la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(ii) (**1pt**) Calcolare, al variare di k, la dimensione del nucleo e dell'immagine di F.

(iii) (**1pt**) Dire se F è simmetrico.

(iv) (**3pt**) Studiare la diagonalizzabilità di F, al variare di k.

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia data la forma quadratica Q su $\mathbb{R}^4$ tale che

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 - 2x_1x_4.$$

Sia poi dato il sottospazio vettoriale

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + kx_2 - x_4 = 0,\ kx_2 + x_3 = 0\}.$$

(i) (**2pt**) Determinare la dimensione del sottospazio ortogonale di U fatto rispetto a Q, al variare di k.

(ii) (**1pt**) Trovare la segnatura di Q.

(iii) (**3pt**) Calcolare una base di Sylvester per Q.

Esercizio 4. Sono dati nello spazio euclideo i piani

$$\pi_1 :\ x + 2y - z = 0 \qquad \pi_2 :\ x + 2y - z + 3 = 0 \qquad \pi_3 :\ x + y - z = 0.$$

(i) (**2pt**) Classificare la posizione reciproca tra π_1 e π_2 e calcolarne la distanza.

(ii) (**2pt**) Costruire, se esiste, una retta r incidente π_1 in $A(1, 1, 3)$ e perpendicolare a π_2.

(iii) (**2pt**) Costruire, se esiste, una sfera il cui centro appartiene a π_3 e che è tangente a π_1 e π_2.

Esercizio 5. Si consideri la curva algebrica piana proiettiva

$$\overline{\mathscr{C}} :\ X_2(X_1^2 - X_0X_1) + X_1^2X_0 - X_2^2X_0 = 0$$

e sia $\mathscr{C}$ la sua parte affine (rispetto ad X_0).

(i) (**2pt**) Determinare i punti impropri e gli asintoti di $\mathscr{C}$.

(ii) (**2pt**) Calcolare i punti singolari di $\mathscr{C}$ specificandone la molteplicità.

(iii) (**1pt**) Determinare le tangenti principali a $\mathscr{C}$ nei suoi punti singolari.

(iv) (**1pt**) Provare che il punto $P[-23, -23, -23]$ è un punto regolare di $\overline{\mathscr{C}}$ e determinare la retta tangente a $\overline{\mathscr{C}}$ in P.