

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova di Geometria – Programma AA 14/15
18 Settembre 2017 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.
----	----	----	----	----	------

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

“Di tutte le scienze la più assurda, a parer mio, e la più capace di soffocare qualsiasi genio, è la Geometria. Questa scienza ridicola ha per oggetto superfici, linee e punti inesistenti in natura. Si fanno passare in teoria centomila linee curve fra un cerchio e una retta tangente, per quanto in realtà non potrebbe passarvi un fuscillo. È veramente uno scherzo di cattivo genere.”
(Voltaire)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l’annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) È dato uno spazio vettoriale S di dimensione 19. Siano v_1, v_2, \dots, v_{10} dei vettori linearmente indipendenti di S . Siano poi u_1, u_2, \dots, u_{18} dei vettori di S . Si chiamino infine V il sottospazio generato dai v_i e U il sottospazio generato dagli u_j .

- (a) La dimensione di $U + V$ vale almeno 10.
- (b) La dimensione di $U \cap V$ vale almeno 10.
- (c) U ha dimensione minore o uguale a 17.
- (d) I sottospazi U e V possono essere a somma diretta.

A2) La conica

$$\mathcal{C} : x^2 - 2y^2 + 6xy + 2x - 3 = 0$$

- (a) è vuota.
- (b) è un’ellisse.
- (c) è un parabola.
- (d) è un’iperbole.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) È dato un endomorfismo simmetrico F di \mathbb{R}^4 , con autovalori 0, 1 e -1. Si sa inoltre che il suo nucleo è il sottospazio

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_4 = 0, x_1 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

V **F** Gli autovalori di F sono tutti semplici.

V **F** $F(1, 1, 0, 1) = (1, 1, 0, 1)$.

V **F** Può capitare che $(1, 1, 1, 1) \in E(1)$.

V **F** F è invertibile.

B2) Sono dati nel piano euclideo i punti $A(3, 3)$, $B(-2, -1)$ e $C(-1, -2)$. Sia M il punto medio del segmento BC .

V **F** Il triangolo ABC è equilatero.

V **F** Il triangolo ABC ha area di misura $\frac{9}{2}$.

V **F** Si ha che $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$.

V **F** Si ha che $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

B3) Sono dati nello spazio i punti

$$P(1, -1, 1) \qquad Q(0, 3, 1) \qquad R(1, 2, 0).$$

V **F** I punti P , Q ed R sono complanari.

V **F** I punti P , Q ed R sono allineati.

V **F** La retta passante per P e Q ha equazione $2x - y + 3 = 0$.

V **F** Il piano di equazione $x - y + 3z = 0$ è equidistante da P , Q ed R .

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormale di V . È dato l'endomorfismo F di V tale che

$$F(v_1) = kv_1 + v_2 \qquad F(v_2) = v_1 + kv_2 \qquad F(v_3) = 2v_1 + kv_2 + v_3,$$

con k parametro reale.

- (i) **(1pt)** Calcolare la matrice associata ad F rispetto alla base \mathcal{B} .
- (ii) **(2pt)** Calcolare, al variare di k , la dimensione del nucleo e dell'immagine di F .
- (iii) **(1pt)** Dire se F è simmetrico.
- (iv) **(2pt)** Studiare la diagonalizzabilità di F , al variare di k .

Esercizio 3. Sono dati in \mathbb{R}^4 i sottospazi vettoriali

$$U = \mathcal{L}((1, 1, 0, k), (2, k, k, -1), (1, 0, 0, k)) \quad W = \mathcal{L}((2, 1, 0, k), (1, -1, 0, 1), (0, 1, 0, k))$$

dove k è un parametro reale.

- (i) **(2pt)** Al variare di k , determinare la dimensione ed una base di U e W .
- (ii) **(2pt)** Al variare di k , determinare una base e la dimensione di $U + W$ e di $U \cap W$.
- (iii) **(1pt)** Per quali valori di k i sottospazi U e W sono a somma diretta?
- (iv) **(1pt)** Per $k = 1$, determinare una base ortonormale di U .

Esercizio 4. Sono dati nello spazio euclideo i piani

$$\pi_1 : x + 2y - z = 0 \quad \pi_2 : x + 2y - z + 3 = 0 \quad \pi_3 : x + y - z = 0.$$

- (i) **(2pt)** Classificare la posizione reciproca tra π_1 e π_2 e calcolarne la distanza.
- (ii) **(2pt)** Costruire, se esiste, una retta r incidente π_1 in $A(1, 1, 3)$ e perpendicolare a π_2 .
- (iii) **(2pt)** Costruire, se esiste, un piano passante per $A(1, 1, 3)$ e perpendicolare a π_2 .

Esercizio 5. Si consideri la curva algebrica piana

$$\mathcal{C} : y(x^2 - x) + x^2 - y^2 = 0.$$

- (i) **(2pt)** Determinare gli asintoti di \mathcal{C} .
- (ii) **(2pt)** Determinare il complesso tangente a \mathcal{C} nei suoi punti singolari.
- (iii) **(2pt)** Provare che il punto $A(1, 1)$ è un punto regolare di \mathcal{C} e determinare la retta tangente a \mathcal{C} in P .