

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Elettrotecnica A.A. 2017/18
Preappello di Geometria – 16 Dicembre 2017
Prof. Cigliola

Nome:	Mat.:
-------	-------

Esercizio 1. Sono dati in \mathbb{R}^4 il sottospazio $U = \mathcal{L}((2, 2, 0, 0), (0, 0, -1, -1))$ e W il sottospazio definito dal sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

- (a) Calcolare la dimensione ed una base di U , W , $U + W$ e $U \cap W$.
- (b) Stabilire se U e W sono a somma diretta.
- (c) Completare la base di U ad una base di \mathbb{R}^4 .
- (d) Determinare una base ortonormale di W .

Esercizio 2. Siano dati i punti del piano euclideo $A(-2, 1)$ e $B(2, 2)$. Si consideri l'insieme \mathcal{C} dei punti P del piano per cui i vettori \overrightarrow{AP} e \overrightarrow{BP} sono ortogonali.

- (a) Provare che \mathcal{C} è una circonferenza e trovare la sua equazione cartesiana.
- (b) Trovare centro e raggio di \mathcal{C} .
- (c) Costruire le rette passanti per l'origine che sono tangenti a \mathcal{C} .
- (d) Si chiami $A'B'$ il diametro di \mathcal{C} che è parallelo all'asse x . Calcolare l'area del triangolo $A'OB'$.

Esercizio 3. Sia dato l'endomorfismo di \mathbb{R}^4 definito da

$$F(x, y, z, t) = (x + 2y + 2z + 4t; y; -y - 2t; y + 2t).$$

- (a) Calcolare la dimensione ed una base di nucleo e immagine di F .
- (b) Calcolare autovalori ed autovettori di F .
- (c) Determinare, se esiste, una base di \mathbb{R}^4 di autovettori per F .

Esercizio 4. Sono dati i piani

$$\pi: x - 2y + 3z + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma: x - 2y + 3z - 3 = 0.$$

- (a) Classificare la posizione reciproca tra i due piani.
- (b) Calcolare la distanza tra i due piani.
- (c) Determinare, se esiste, una retta r perpendicolare a π e passante per l'origine.
- (d) Sia $A(1, 1, 0)$. Detti P ed S i punti in cui r interseca π e σ rispettivamente, calcolare l'area del triangolo APS .

Esercizio 5. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, discutere e risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 4x + ky + kz = 2 \\ 3x - y + z = 0 \\ kx + 2y = 2. \end{cases}$$

Esercizio 6. Dare la definizione di nucleo di un'applicazione lineare e dimostrare che è un sottospazio vettoriale del dominio dell'applicazione.

Esercizio 7. Richiamare e dimostrare la formula per il calcolo della distanza tra due punti nello spazio euclideo.