

Risultati degli Esercizi proposti su Curve Algebriche Piane

a cura di Antonio Cigliola

Esercizio 3.1

- (i) $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$;
- (ii) $x + y = 0$;
- (iv) $X(x_0^2 - 2y_0) - Y(2x_0 - y_0^2) + 4x_0y_0 - x_0^3 - y_0^3 = 0$;
- (v) $(y_0 - 1)Y + x_0X - x_0^2 - y_0^2 + y_0 = 0$;
- (vi) $y_0X + x_0Y - 2x_0y_0 = 0$.

Esercizio 3.2

- (i) Simmetrica rispetto ad entrambi gli assi e rispetto all'origine.
- (ii) Nessuna simmetria.
- (iii) Simmetrica rispetto all'asse x .
- (iv) Simmetrica rispetto ad entrambi gli assi e rispetto all'origine.
- (v) Simmetrica rispetto all'asse y .

Esercizio 3.3

- (i) $(0, 0)$
- (ii) $(\pm 1, 0)$
- (iii) $(1, 1), (-1, -1)$
- (iv) $(0, \pm 1)$
- (v) $(0, 0), (1, \pm 1)$ (difficile)
- (vi) $(-1, 1)$

Esercizio 3.4 Si lavori solo rispetto all'origine quando è un punto singolare.

- (i) L'origine è un nodo ordinario: $x = 0, y = 0$.
- (ii) L'origine è un punto isolato.
- (iii) L'origine è una cuspide: $y = 0$ tangente doppia.
- (iv) La curva è liscia.
- (v) L'origine è una cuspide con tangente l'asse x contato due volte.
- (vi) L'origine è un punto triplo con tangenti l'asse x contato due volte e l'asse y .
- (vii) L'origine è un punto doppio ordinario con tangenti $y = \pm\sqrt{\frac{11}{3}}x$.

Esercizio 3.6

- (i) I punti della retta $y = -1$ tranne il punto $(2, -1)$ hanno tangente orizzontale. Il punto $(2, -1)$ è singolare. (Si osservi che la curva è riducibile.)
- (ii) Priva di punti a tangente orizzontale o verticale.
- (iii) Il punto $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ ha tangente orizzontale. Il punto $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}, \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)$ ha tangente verticale.
- (iv) L'origine è una cuspidè a tangente orizzontale; il punto $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{4}\right)$ ha tangente orizzontale.
- (v) Per $n = 0$ la curva è vuota. Per $n = 1$ non ci sono punti a tangenti orizzontali né verticali. Per $n > 2$ e pari i punti $(0, \pm 1)$ hanno tangente orizzontale e i punti $(\pm 1, 0)$ hanno tangente verticale. Per $n > 1$ e dispari, il punto $(0, 1)$ ha tangente orizzontale e il punto $(1, 0)$ ha tangente verticale.
- (vi) Priva di punti a tangente orizzontale o verticale.

Esercizio 3.7

- (i) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{8}{9}\right)$
- (ii) $(0, 1)$
- (iii) Non ci sono flessi.
- (iv) $\left(\frac{4}{3}, \pm \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$
- (v) Non ci sono flessi.
- (vi) $\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}, \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt[4]{2\sqrt{3}-3}\right)$
- (vii) $\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}, \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt[4]{2\sqrt{3}+3}\right)$