**Università degli Studi di Roma La Sapienza**
**Corso di laurea in Ingegneria Energetica**
**Geometria A.A. 2014-2015**
**Foglio di esercizi n.12 (prof. Cigliola)**

**Esercizio 1.** Siano dati $a \in \mathbb{R}$ ed i vettori $u = \vec{\imath} + (a-1)\vec{\jmath} + (a+1)\vec{k}$, $v = a\vec{\imath} + 2a\vec{\jmath} + \vec{k}$ e $w = 2\vec{\imath} + (a+3)\vec{\jmath} + 2a\vec{k}$ di $\mathbb{R}^3$.

Determinare i valori di $a$ per cui:

(i) $u$ è parallelo a $3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 3\vec{k}$;

(ii) $w$ è parallelo a $\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$;

(iii) $\|u\| = 2$;

(iv) $u /\!/ v$;

(v) $u \perp v$;

(vi) $u$, $v$ e $w$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$;

(vii) $v \wedge w = \vec{0}$;

(viii) $v \wedge w$ è parallelo a $18\vec{\imath} - 18\vec{\jmath} + 54\vec{k}$;

(ix) $v$ è complanare con $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ e $\vec{\jmath} + \vec{k}$;

(x) $u \wedge v \cdot w = 0$.

**Esercizio 2.** Siano $v$ e $w$ due vettori di $\mathbb{R}^2$. Si supponga che $v \wedge w \cdot u = \vec{0}$, per ogni $u \in \mathbb{R}^2$. Cosa si può dedurre su $v$ e $w$?

**Esercizio 3.** Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il vettore $v = (2, 1, -1)$. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ad ogni $u \in \mathbb{R}^3$ associa $F(u) = u \wedge v$.

(i) Dimostrare che $F$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.

(ii) Stabilire se $F$ è simmetrico.

(iii) Determinare se $F$ è un automorfismo e calcolare $\operatorname{Ker} F$ ed $\operatorname{Im} F$.

(iv) Trovare autovalori e autospazi di $F$ e stabilire se esso è diagonalizzabile.

**Esercizio 4.** Sia dato in $\mathbb{R}^4$ il vettore $v = (-2, -1, 1, 2)$. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ che ad ogni $u \in \mathbb{R}^4$ associa $F(u) = u \cdot v$.

(i) Dimostrare che $F$ è un'applicazione lineare.

(ii) Calcolare $\operatorname{Ker} F$ ed $\operatorname{Im} F$.

**Esercizio 5.** Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ $u = (1, 1, 0)$ e $v = (2, -1, 1)$. Risolve l'equazione vettoriale $u \wedge x = u \wedge v$ ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto.

**Esercizio 6.** Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ $u = (1, 1, 0)$ e $v = (2, -1, 1)$. Risolve l'equazione vettoriale $u \wedge x = v \wedge 2u$ ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto.

**Esercizio 7.** Sia $a \in \mathbb{R}$ e siano $u = (a, 1, -2)$, $v = (1, 0, -1)$, $w = (2, -1, 3)$ e $t = (1, 0, 2)$. Per quali valori di $a$ il vettore $t$ è ortogonale a $\|u\| v \wedge w - (u \cdot u) u \wedge w$?

**Esercizio 8.** Siano $u$, $v$ e $w$ vettori non complanari di $\mathbb{R}^3$. Calcolare la dimensione dei sottospazi generati da:

(i) $\{\, u,\ v,\ (u \wedge v \cdot w) w \,\}$;

(ii) $\{\, u,\ v,\ (u + v) \wedge (u - v) \,\}$;

(iii) $\{\, u,\ u + v,\ u \wedge (u + v) \,\}$;

(iv) $\{\, u + (u \wedge v),\ v + (u \wedge v),\ u - v \,\}$;

(v) $\{\, u + (u \wedge v),\ v + (v \wedge u),\ u - v \,\}$;

(vi) $\{\, u \wedge v,\ u \wedge w,\ w \wedge v \,\}$.

**Esercizio 9.** Un triangolo $ABC$ è isoscele sulla base $AB$ ed ha il vertice $C$ sulla retta $x + y = 1$. Calcolare il vertice $C$ e la sua area sapendo che $A = (2, 0)$ e $B = (4, 6)$.

**Esercizio 10.** Trovare l'equazione della retta passante per il punto di intersezione delle rette $3x - y + 7 = 0$ e $y = x + 5$ e perpendicolare alla retta $2x - 4y - 1 = 0$.

**Esercizio 11.** Rappresentare graficamente, calcolare l'area e il perimetro del quadrilatero $ABCD$ di vertici

$$A(5, 2) \quad B(-2, 5) \quad C(-4, -3) \quad D(-1, 2).$$

Ripetere l'esercizio col quadrilatero $ACBD$.

**Esercizio 12.** Sono dati i punti $A(-2, 1)$ e $B(-3, 3)$. Trovare sull'asse delle ascisse il punto equidistante da $A$ e $B$.

**Esercizio 13.** Sia $D$ il punto in cui la retta $r:\ 2x - 3y + 2 = 0$ interseca la retta passante per $A(-3, 2)$ e $B(1, -2)$. Condurre da $D$ la retta $s$ perpendicolare ad $\overrightarrow{AB}$ e sia $C$ il punto in cui si intersecano $s$ e la retta per $B$ parallela all'asse $y$. Calcolare l'area del triangolo $ABC$.

**Esercizio 14.** Un quadrato $ABCD$ ha un vertice in $A(1, 2)$, le ascisse degli altri vertici positive e $\overrightarrow{BC}$ contenuto nella retta $4x + 16y + 15 = 0$. Calcolare tutti i vertici del quadrato, il suo perimetro e la sua area.

**Esercizio 15.** Trovare la distanza di $P(2, -3)$ dalla retta $4x - 3y + 7 = 0$.

**Esercizio 16.** Costruire un rombo di lato 4 sistemando i suoi vertici sulle rette perpendicolari $s:\ x-2y+3=0$ ed $s:\ 2x+y-10=0$.

**Esercizio 17.** Calcolare l'ampiezza degli angoli compresi tra le rette $r:\ x-2y+5=0$ e $s:\ x+y-\pi=0$.

**Esercizio 18.** Determinare tutti i punti equidistanti da $A(2,-1)$ e da $B(1,3)$.

**Esercizio 19.** Calcolare gli angoli compresi tra una retta $r$ di parametri direttori $(2,1)$ e la retta $r'$ di equazione $x+3y-1=0$.

**Esercizio 20.** Determinare la circonferenze passante per i punti $O(0,0)$, $A(1,2)$ e $B(2,1)$.

**Esercizio 21.** Determinare la circonferenze passante per i punti $O(0,0)$, $A(1,2)$ e $B(2,1)$.

**Esercizio 22.** Determinare, se esiste, la circonferenze passante per i punti $O(1,1)$, $A(2,2)$ e $B(-1,-1)$.

**Esercizio 23.** Dato il punto $A(1,-1)$ e la retta $r:\ x-y-5=0$, determinare

(i) la proiezione ortogonale di $A$ su $r$;

(ii) la distanza di $A$ da $r$;

(iii) il simmetrico di $A$ rispetto ad $r$.

**Esercizio 24.** Dati i punti $A(1,0)$, $B(3,2)$ e $C(-2,1)$,

(i) determinare i punti equidistanti da $A$ e da $B$;

(ii) determinare i punti equidistanti da $A$, $B$ e $C$;

(iii) calcolare l'area del triangolo $ABC$;

(iv) calcolare il perimetro del triangolo $ABC$;

(v) calcolare i coseni degli angoli del triangolo $ABC$.

**Esercizio 25.** Siano dati $A(1,-1)$ e $B(2,2)$. Determinare i punti $P$ del piano tali che $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$.