Università degli Studi di Roma La Sapienza
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria A.A. 2014-2015
Foglio di esercizi n.16 (prof. Cigliola)

Esercizio 1. Determinare l'equazione della retta tangente a ciascuna delle seguenti curve algebriche piane nei punti accanto indicati:

(i) $\mathscr{C}: \; x^2 - 2x + y^2 = 0$ nel punto $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$;

(ii) $\mathscr{C}: \; (x+y)(x-y+2) = 0$ nel punto $P = (0,0)$;

(iii) $\mathscr{C}: \; x^4 + y^4 - 3x^2y = 0$ nei suoi punti di ordinata 1;

(iv) $\mathscr{C}: \; x^3 - 6xy + y^3 = 0$ in un suo generico punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$;

(v) $\mathscr{C}: \; x^2 + (y-1)^2 = r^2$, con $r > 0$, in un suo generico punto (x_0, y_0);

(vi) $\mathscr{C}: \; xy - 1 = 0$ in un suo generico punto (x_0, y_0).

Esercizio 2. Individuare le simmetrie delle seguenti curve:

(i) $\mathscr{C}: \; x^2 + y^2 = 9$;

(ii) $\mathscr{C}: \; x + y - 2 = 0$

(iii) $\mathscr{C}: \; x^3y^2 - x^2 + y^4 = 0$;

(iv) $\mathscr{C}: \; y^4 - y^2 + x^2 - x^4 = 0$;

(v) $\mathscr{C}: \; 3xy + x^3y^3 - 2x^5 = 0$

Esercizio 3. Determinare i punti singolari delle seguenti curve algebriche piane:

(i) $\mathscr{C}: \; x^3 - 6xy + y^3 = 0$;

(ii) $\mathscr{C}: \; y^2(1-x^2) = (x^2 + 2y - 1)^2$;

(iii) $\mathscr{C}: \; (x^2-1)^2y = (y^2-1)^2x$;

(iv) $\mathscr{C}: \; (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 = 1$;

(v) $\mathscr{C}: \; (y^2 - x^2)(x-1)(x-\frac{3}{2}) = 2(y^2 + x^2 - 2x)^2$;

(vi) $\mathscr{C}: \; (x^2+y^2)(x^2+y^2-2x)^2 = 4(x^2-y^2)^2$;

(vii) $\mathscr{C}: \; xy^2 + 2y - x^2 - 3x - 3 = 0$.

Esercizio 4. Dopo aver verificato che l'origine è un punto singolare delle seguenti curve, determinare il complesso ad esso tangente:

(i) $\mathscr{C}: \ x^3 - 6xy + y^3 = 0;$

(ii) $\mathscr{C}: \ y^2 = x^3 - x^2;$

(iii) $\mathscr{C}: \ y^2 = x^3;$

(iv) $\mathscr{C}: \ y^2 - x^3 - x = 0;$

(v) $\mathscr{C}: \ y^2 - x^3 + x^4 = 0;$

(vi) $\mathscr{C}: \ y^4 + x^4 + xy^2 = 0;$

(vii) $\mathscr{C}: \ (y^2 - x^2)(x-1)(x-\frac{3}{2}) = 2(y^2 + x^2 - 2x)^2;$

(viii) $\mathscr{C}: \ xy^2 + 2y - x^2 - 3x - 3 = 0.$

Esercizio 5. Determinare gli eventuali asintoti delle seguenti curve algebriche piane:

(i) $\mathscr{C}: \ (x-1)y^2 - x = 0;$

(ii) $\mathscr{C}: \ y^2x(y-x) - y^3 - yx^2 + 2x^2 = 0;$

(iii) $\mathscr{C}: \ (x^2-1)(x-2)y^2 - x^3 + 4y = 0;$

(iv) $\mathscr{C}: \ x^2(y+2) = y^2(x-1);$

(v) $\mathscr{C}: \ x(y-x)^2 = y^2;$

(vi) $\mathscr{C}: \ (y^2 - x^2)(x-1)(x-\frac{3}{2}) = 2(y^2 + x^2 - 2x)^2;$

(vii) $\mathscr{C}: \ y(y-x)^2(y+2x) = 9x^3.$

Esercizio 6. Determinare i punti regolari a tangente orizzontale ed a tangente verticale delle seguenti curve algebriche piane:

(i) $\mathscr{C}: \ xy + (x-1)y^2 + 1 = 0;$

(ii) $\mathscr{C}: \ x^3 + y^3 = 0;$

(iii) $\mathscr{C}: \ x^3 + y^3 - xy = 0;$

(iv) $\mathscr{C}: \ x(y-x)^2 = y^2;$

(v) $\mathscr{C}: \ x^n + y^n = 1$, con $n \in \mathbb{N}$;

(vi) $\mathscr{C}: \ y^2 + xy - 2x^2 = 0.$

Esercizio 7. Studiare e tracciare il grafico delle seguenti curve algebriche piane:

(i) $\mathscr{C}: \ 2x^2 - 4x + 2 + 3y^2 - 4 = 0;$

(ii) $\mathscr{C}: \ x^3 - 9xy + y^3 = 0;$

(iii) $\mathscr{C}: \; y^2 = x^3 - x^2$;

(iv) $\mathscr{C}: \; y^2 = x^3$;

(v) $\mathscr{C}: \; y^2 - x^3 - x = 0$;

(vi) $\mathscr{C}: \; y^2 = x^3 - x$;

(vii) $\mathscr{C}: \; y^2 = x^3 - x^4$;

(viii) $\mathscr{C}: \; y^4 + x^4 + xy^2 = 0$;

(ix) $\mathscr{C}: \; y^4 + x^4 + x^2y^2 = 0$;

(x) $\mathscr{C}: \; y^4 + x^4 - 4x^2y^2 = 0$;

(xi) $\mathscr{C}: \; x^4 + y^4 - 3xy^2 = 0$;

(xii) $\mathscr{C}: \; x^4 + y^4 - x^2y - y^2x = 0$;

(xiii) $\mathscr{C}: \; (y - 2x^2)^2 = x^5$;

(xiv) $\mathscr{C}: \; x^4 + 2x^2y - 2y^3 = 0$;

(xv) $\mathscr{C}: \; x^4 - xy - y^3 = 0$;

(xvi) $\mathscr{C}: \; (y^2 - x^2)(x-1)(x - \frac{3}{2}) = 2(y^2 + x^2 - 2x)^2$ (difficile ma di sicuro effetto...);

(xvii) $\mathscr{C}: \; x^5 + y^5 - 5x^2y = 0$.

Esercizio 8. Classificare le curve della forma

$$y^2 = f(x),$$

dove $f(x)$ è un polinomio di quinto grado a coefficienti reali. (Suggerimento: si proceda come si è fatto per le parabole cubiche di Newton).

Esercizio 9. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di curve:

$$\mathscr{C}_a: \; x^2y = x + a.$$

(i) Provare che le curve $\mathscr{C}_a$ non hanno alcun punto in comune.

(ii) Provare che ciascuna delle $\mathscr{C}_a$ presenta un solo flesso e determinare la tangente inflessionale in esso.

(iii) Provare che le $\mathscr{C}_a$ hanno un asintoto in comune.

(iv) Determinare i punti a tangente orizzontale delle $\mathscr{C}_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(v) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 10. Dopo aver verificato che le seguenti curve sono riducibili, determinare le loro componenti irriducibili ed i loro punti singolari:

(i) $\mathscr{C}: \; x^4 + y^4 - 4x^2y^2 = 0$;

(ii) $\mathscr{C}: \; y^4 - 2x^2y^2 + x^4 - x^2 + y^2 = 0$;

(iii) $\mathscr{C}: \; y^3 - x^2y - x^2y^2 + x^4 - x^2 + y^2 = 0$;

(iv) $\mathscr{C} \; y^4 - x^4 + 2x^2 - 1 = 0$.

Esercizio 11. Sia data la curva

$$\mathscr{A}: \; 2x^6 + 3x^4y^2 - 3x^4 - 3x^2y^4 + x^2 - 2y^6 + 3y^4 - y^2 = 0.$$

(i) Verificare che $\mathscr{A}$ è simmetrica rispetto all'asse x, all'asse y e rispetto alle due bisettrici del piano.

(ii) Provare che $\mathscr{A}$ contiene l'ellisse $\mathscr{E}: \; x^2 + 2y^2 = 1$.

(iii) Dedurre grazie ai punti (i) e (ii) che $\mathscr{A}$ contiene l'ellisse $\mathscr{E}: \; 2x^2 + y^2 = 1$.

(iv) Determinare le componenti irriducibili di $\mathscr{A}$.

(v) Trovare i punti singolari di $\mathscr{A}$ e tracciare il suo grafico.

Esercizio 12. Siano date le curve $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$. Provare che

$$\operatorname{Sing}(\mathscr{C} \cup \mathscr{D}) = \operatorname{Sing}(\mathscr{C}) \cup \operatorname{Sing}(\mathscr{D}) \cup (\mathscr{C} \cap \mathscr{D}).$$

Esercizio 13. Dimostrare che due circonferenze hanno al più due punti in comune.

Esercizio 14. Provare che due coniche che hanno cinque punti comuni necessariamente coincidono.

Esercizio 15. Dimostrare che una conica che contiene tre punti allineati è unione di rette.

Esercizio 16. Dimostrare che una cubica che ha sette punti in comune con una conica contiene necessariamente una retta.

Esercizio 17. Siano date due curve $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ di gradi rispettivamente m ed n, con $m \leqslant n$. Si supponga inoltre che $\mathscr{C}$ sia irriducibile. Dimostrare che se $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ hanno $mn + 1$ punti in comune, la curva $\mathscr{D}$ è riducibile e contiene $\mathscr{C}$.

Esercizio 18. Si dimostri che vale la legge di annullamento del prodotto tra polinomi.

Esercizio 19. Dimostrare le formule del grado per la somma ed il prodotto di polinomi.

Esercizio 20. Dimostrare che una conica singolare contiene una retta. È vero anche il viceversa?