Università degli Studi di Roma La Sapienza
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria A.A. 2014-2015
Foglio di esercizi n.2 (prof. Cigliola)

Esercizio 1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} h & -2 \\ 2 & h \end{pmatrix}$$
dire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando la risposta.

(i) $\operatorname{rk} A = 2$, per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$.

(ii) $\det(A) = -4$ per $h = 0$.

Esercizio 3. Data $A \in M_2(\mathbb{R})$, si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando la risposta.

(i) $A + A^T$ è una matrice simmetrica.

(ii) Se A ha rango massimo anche $A + A^T$ ha rango massimo.

(iii) Se $\det A = 1$ allora $\det(2A) = 2$.

(iv) Se $\det A = 1$ allora $\det(AB) = \det(B)$, per ogni $B \in M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 4. Dopo aver stabilito se le seguenti matrici sono invertibili, calcolarne l'inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Sia k un parametro reale e siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare $\det A$ e $\det B$ e stabilire per quali valori di k A e B sono invertibili.

(ii) Trovare, se possibile, la matrice inversa di A per $k = 1$ e di B per $k = -1$.

(iii) Calcolare il rango di A e B al variare di k.

Esercizio 6. Dopo aver stabilito se le seguenti matrici sono invertibili, calcolarne l'inversa:

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \neq 0$;

(ii) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, con $a, b, c \neq 0$;

(iii) $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$ con $ad - bc \neq 0$.

Esercizio 7. Siano K un campo ed $a_1, \ldots, a_n \in K$. Dimostrare che la matrice diagonale $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se $a_1 \cdots a_n \neq 0$. Provare inoltre che in tale ipotesi, la sua inversa è $\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$.

Esercizio 8. Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti:

$$v_1 = (1,\ -1,\ 1), \qquad v_2 = (2,\ 1,\ -1), \qquad v_3 = (1,\ -4,\ 4).$$

Esercizio 9. Dopo aver verificato che i tre vettori di $\mathbb{R}^2$ $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (2, -3)$ e $v_3 = (-2, 1)$ sono linearmente dipendenti, si scriva v_3 come combinazione lineare dei vettori v_1 e v_2 ed il vettore v_1 come combinazione lineare di v_2 e v_3.

Esercizio 10. Sono dati i vettori $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ e $v_3 = (1, 2, 3)$ di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Scrivere $w = (3, -1, 1)$ come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3. Provare infine che ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di tali vettori.

Esercizio 11. Sono dati i vettori $v_1 = (1, 1, 3, 1)$ e $v_2 = (2, 0, 0, -1)$ di $\mathbb{R}^4$. Per quali valori reali di k il vettore $w = (0, 2, k, 3)$ è combinazione lineare di v e w?

Esercizio 12. Siano dati i vettori $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, 0, 2)$ e $w = (1, k, -1)$ di $\mathbb{R}^3$. Per quali valori di k i tre vettori sono linearmente indipendenti?

Esercizio 13. Determinare il rango delle seguenti matrici a coefficienti reali:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 100 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \pi & \pi^2 \\ \pi^2 & \pi^3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 14. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinare il rango della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & h & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & h+1 \\ 0 & -2 & h+1 & 0 \\ 0 & -h & -h & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 15. Al variare del parametro k, determinare il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ k & k & k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & k & 0 & 2 \\ k & 2 & 0 & k \\ 1 & 0 & k & k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -k & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Esercizio 16. Calcolare i seguenti determinanti:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 10 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Esercizio 17. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:

$$\det\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} = 0 \qquad \det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x & x & 1 \\ x & x & x \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & x \\ x & 1 & x \end{pmatrix} \geqslant 0 \qquad \det\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ x & x & 1 \\ x & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} < 0$$

Esercizio 18. Dimostrare che valgono le seguenti eguaglianze:

(i) $$\det\begin{pmatrix} 1+x & 1+y & 1 \\ 1+x_1 & 1+y_1 & 1 \\ 1+x_2 & 1+y_2 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\det\begin{pmatrix}1 & a & bc\\ 1 & b & ac\\ 1 & c & ab\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{pmatrix}$$

(iii) $$\det\begin{pmatrix}a & b & ab\\ b & c & bc\\ c & a & ac\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & ac & bc\\ 1 & ab & ac\\ 1 & bc & ab\end{pmatrix}$$

(iv) $$\det\begin{pmatrix}x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3\\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3\\ x_1+z_1 & x_2+z_2 & x_3+z_3\end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}$$