Università degli Studi di Roma La Sapienza
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria A.A. 2014-2015
Foglio di esercizi n.3 (prof. Cigliola)

Esercizio 1. Utilizzando il metodo dato nella dimostrazione del teorema di Cramer, si calcoli la matrice inversa delle seguenti matrici:

(i) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & -13 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. Risolvere, se possibile, i seguenti sistemi a coefficienti reali col metodo della matrice inversa:

(i) $\begin{cases} 6x_1 - 17x_2 = -22 \\ -x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z = -3 \\ -x - y = 1 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 = 20 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 11 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 + 17x_4 = 8 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} ay + bz = ab + bc \\ ax + cz = a^2 + c^2 \\ bx + cy = ab + bc \end{cases}$ con $abc \neq 0$.

Esercizio 3. Si risolvano i seguenti sistemi lineari omogenei:

(i) $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+5y+7z=0 \\ 4x+7y+10z=0 \\ 5x+9y+13z=0 \end{cases}$$

(ii) $$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-3y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

(iii) $$\begin{cases} -2x+3z=0 \\ -4x-2y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ -10x-6y=0 \end{cases}$$

(iv) $$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3-x_4-2x_5=0 \\ 4x_1-3x_2+x_3-5x_4+5x_5=0 \\ 8x_1+3x_2+x_3-7x_4+x_5=0 \end{cases}$$

(v) $$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4-3x_5=0 \end{cases}$$

(vi) $$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_5=0 \\ x_1+x_5=0 \\ -x_1-x_2+2x_5=0 \end{cases}$$

(vii) $$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Risolvere i seguenti sistemi lineari usando la regola di Cramer:

(i) $$\begin{cases} 2x_1+x_2=-1 \\ x_1-x_2=-2 \end{cases}$$

(ii) $$\begin{cases} -x_1+4x_2+6x_3=4 \\ x_1-x_2-2x_3=-2 \\ -x_1+2x_2+3x_3=3 \end{cases}$$

(iii) $$\begin{cases} -5x_1+2x_2+4x_3=15 \\ 10x_1-x_2+6x_3=18 \\ -10x_1+x_2+6x_3=16 \end{cases}$$

(iv) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

(vi) $\begin{cases} 3(2x + z) - 1 = z - 2y \\ 2z - y = 2(2 - x + y) \\ 4x + y = 3 - z \end{cases}$

Esercizio 5. Risolvere i seguenti sistemi lineari :

(i) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + 6z = 0 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} -x + z = -2 \\ x + z = 0 \\ x + y = 3 \\ x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Esercizio 6. Discutere e risolvere i seguenti sistemi lineari parametrici:

(i) $\begin{cases} x + 2y + hz - t = 1 \\ (h - 1)y + (1 - h)t = h \\ x + 3y + 2z - ht = 3 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} kx + y = 2k - 3 \\ 2x - ky = 3k + 4 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} ax + y = 1 - 2a \\ x + by = b - 2 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} (a-2)x + ay = -a \\ (2-a)x + (2+a)y = -a^2 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} x + 2y + hz - t = 1 \\ (h-1)y + (1-h)t = h \\ x + 3y + 2z - ht = 3 \end{cases}$

(vi) $\begin{cases} 3x - ay + 2z = 0 \\ ax - 3y + 2z = 0 \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} ax + by = 1 \\ x + y = b \end{cases}$

(viii) $\begin{cases} 2x + ky = -3 \\ 6x + 3ky = k \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

(ix) $\begin{cases} ax + y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 1 \\ x + 3y + az = 1 \end{cases}$

(x) $\begin{cases} kx + y + z = k + 2 \\ x + ky + z = k + 2 \\ x + y + kz = k + 2 \end{cases}$

(xi) $\begin{cases} ax_2 + 3x_3 - ax_4 = 2 \\ ax_1 + 2ax_2 - x_3 = a \\ ax_1 + ax_2 - 4x_3 + ax_4 = a - 1 \end{cases}$

(xii) $\begin{cases} kx + z = 1 \\ x + z = 1 \\ hx + kz = h + k \\ hx + y = h \end{cases}$

(xiii) $\begin{cases} kx + y = 2k - 3 \\ 2x - ky = 3k + 4 \end{cases}$

(xiv) $\begin{cases} kx + z = 1 \\ x + z = 1 \\ hx + kz = h + k \\ hx + y = h \\ kx + y = k \end{cases}$

Esercizio 7. Usando opportunamente la nozione di rango di matrice, stabilire se i seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti:

(i) $v_1 = (1, -1), \quad v_2 = (0, 1) \quad$ in $\mathbb{R}^2$

(ii) $v_1 = (1, -1), \quad v_2 = (-1, 1) \quad$ in $\mathbb{R}^2$

(iii) $v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (-1, 1, 2) \quad$ in $\mathbb{R}^3$

(iv) $v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (-1, 1, 2), \quad v_3 = (0, 1, 1) \quad$ in $\mathbb{R}^3$

(v) $v_1 = (-2, 2, 4), \quad v_2 = (-1, 1, 2) \quad$ in $\mathbb{R}^3$

(vi) $v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (-1, 1, 2), \quad v_2 = (0, 1, 0) \quad$ in $\mathbb{R}^3$

Esercizio 8. Usando opportunamente la nozione di rango di matrice, stabilire per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (-1, k, 1, k) \quad v_2 = (1, 0, 1, 0) \quad v_3 = (-1, 1, 1, k) \quad v_4 = (2, 0, k, 1)$$