Università degli Studi di Roma La Sapienza
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria A.A. 2014-2015
Foglio di esercizi n.4 (prof. Cigliola)

Esercizio 1. Sono dati i vettori $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (2,1,-1)$ e $v_3 = (1,2,3)$ di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Scrivere il vettore $(3,-1,1)$ come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3. Provare infine che ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di tali vettori.

Esercizio 2. Sono dati i vettori $v = (1,1,3,1)$ e $w = (2,0,0,-1)$ di $\mathbb{R}^4$. Per quali valori reali di k il vettore $(0,2,k,3)$ è combinazione lineare di v e w?

Esercizio 3. Siano dati i vettori $u = (1,2,1)$, $v = (1,0,2)$ e $w = (1,k,-1)$ di $\mathbb{R}^3$. Per quali valori di k i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$? Determinare la dimensione di $\mathcal{L}(u,v,w)$ e di $\mathcal{L}(v,w)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono sottospazi vettoriali:

(i) $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}$;

(ii) $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \}$;

(iii) $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 3 \}$;

(iv) $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = x + 3y = 0 \}$;

(v) $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \}$;

(vi) $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \}$;

(vii) $G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geqslant 0 \}$;

(viii) $H = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 0 \}$;

(ix) $I = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \log y = 0 \}$;

(x) $L = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0 \}$;

(xi) $M = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 0 \}$;

(xii) $N = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 0 \}$.

Esercizio 5. Determinare una base del sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^4$, dove

$$W = \mathcal{L}\big((2,-1,1,1),\ (0,0,0,0),\ (1,-1,1,1),\ (1,0,0,0),\ (4,-2,2,2)\big).$$

Esercizio 6. Determinare una base del sottospazio vettoriale $U \subseteq \mathbb{R}^3$, dove

$$U = \mathcal{L}\big((1,-3,-2),\ (0,-1,-1),\ (0,2,2),\ (0,0,0),\ (-1,2,1)\big).$$

Esercizio 7. Sia $E = \mathcal{L}((1,1,0,1),(2,0,1,1)) \subseteq \mathbb{Q}^4$. Per quali valori di k si ha che $(1,k,2,-1) \in E$?

Esercizio 8. Sia $W \subseteq \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici per cui la somma degli elementi della diagonale vale 0. Provare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Esercizio 9. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia W un sottospazio vettoriale di V. Provare che $\dim W \leqslant \dim V$. Dimostrare inoltre che $W = V$ se e solo se $\dim W = \dim V$.

Esercizio 10. Per quali valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ i seguenti sistemi lineari hanno per soluzioni un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$?

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} x + y + kz = 0 \\ 2x + 3y + 4hz = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 0 \\ 4x + 7y + 10kz = 0 \\ 5x + 9y + 13z = h \end{cases} \qquad \text{con } n = 3;$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = h \\ 2x + y = k \end{cases} \qquad \text{con } n = 3;$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{cases} -2hx + 3z = 0 \\ -4hx - 2y + z = 0 \\ 2hx + 2y + 2z = 0 \\ -10hx - 6y = 0 \end{cases} \qquad \text{con } n = 3;$$

$$\text{(iv)} \quad \begin{cases} 2kx_1 + 3x_2 + x_3 - kx_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 5x_5 = k \\ 8x_1 + 3kx_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \qquad \text{con } n = 5;$$

$$\text{(v)} \quad \begin{cases} hx_1 - 2kx_2 + hx_3 - kx_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \qquad \text{con } n = 5;$$

$$\text{(vi)} \quad \begin{cases} 2x_1 + hx_2 - kx_5 = 0 \\ x_1 + kx_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2kx_5 = 0 \end{cases} \qquad \text{con } n = 5;$$

Esercizio 11. Verificare che $\{ (-1,1), \ (2,1) \}$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Scrivere i vettori $u = (2,2)$, $v = (0,0)$, $w = (\pi,\pi)$ e $u + w$ come combinazione lineare di tali vettori.

Esercizio 12. Verificare che $\{ (-1,1,1), \ (2,1,0), \ (0,0,1) \}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Scrivere i vettori $u = (2,1,-1)$, $v = (1,-3,0)$ e $u + v$ come combinazione lineare di tali vettori.

Esercizio 13. Verificare che $\{ x+1,\ x^2-1,\ 2 \}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$. Scrivere i vettori $u = x^2+x+1$, $v = -x-1$ e $u+3v$ come combinazione lineare di tali vettori.

Esercizio 14. Verificare che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$. Scrivere i vettori $u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ e $u-v$ come combinazione lineare di tali vettori.

Esercizio 15. Sia dato

$$U = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \leqslant 2,\ f(-2) = 0 \} \cup \{ 0 \}.$$

Verificare che U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Stabilire per quali valori dei parametri $h, k, \alpha \in \mathbb{R}$, i seguenti polinomi sono in U:

$$f(x) = (x+2)(3x-1)+k+1 \qquad g(x) = hx^2+x+2+h \qquad p(x) = \alpha(x^3+1-x)+2+x.$$

Scrivere infine la forma generale degli elementi di U.

Esercizio 16. Sia dato S il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]$ definito da

$$S = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-1) = f(1) = 0,\ \deg f(x) \leqslant 4 \} \cup \{ 0 \}.$$

Provare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Dire se $f(x) = x(x^2+1)(x^2-1) \in S$. Per quali valori dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$ si ha $\mathcal{L}(hx^3+kx+k+1) \subseteq S$? Scrivere infine la forma generale degli elementi di S.

Esercizio 17. Sia n un intero positivo. Dimostrare che gli insiemi $Sym_n(\mathbb{R})$, $ASym_n(\mathbb{R})$ e $Diag_n(\mathbb{R})$ sono sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{R})$.

Esercizio 18. Si considerino i vettori $u = (2,k,1)$, $v = (k,2,0)$ e $w = (0,0,k)$ di $\mathbb{R}^3$ e sia F il sottospazio da essi generato. Per quali valori di k i vettori u, v e w sono una base di $\mathbb{R}^3$? Calcolare la dimensione di F al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 19. Si considerino i polinomi $f(x) = x^2-1$, $g(x) = -kx^2+1$ e $h(x) = kx^2+k$ di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ e sia B il sottospazio da essi generato. Per quali valori di k i polinomi $f(x), g(x)$ e $h(x)$ sono una base di B? Calcolare la dimensione di B al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per quali valori di k il polinomio $a(x) = 2-kx+kx^2$ appartiene a B?

Esercizio 20. Sia Z il sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Per quali valori di k la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathcal{L}(A_1, A_2)$?

Esercizio 21. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che l'insieme

$$\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA \}$$

è sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$. Questo sottospazio è detto il centralizzante di A in $M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 22. Dimostrare che l'insieme

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 23. Dimostrare che l'insieme

$$W = \left\{ b + ax + ax^2 \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 24. Determinare la dimensione ed una base dello spazio vettoriale

$$V = \mathcal{L}(-x+1,\ 2x-2,\ x^2-1,\ 6) \subseteq \mathbb{R}[x].$$

Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda x^2 - 1 \in V$?

Esercizio 25. Determinare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi vettoriali:

(i) $\mathcal{L}((-1,1),\ (0,0),\ (1,0),\ (-1,2)) \subseteq \mathbb{R}^2$;

(ii) $\mathcal{L}((\pi,\pi),\ (e,e)) \subseteq \mathbb{R}^2$;

(iii) $\mathcal{L}((\pi,e),\ (e,-\pi)) \subseteq \mathbb{R}^2$;

(iv) $\mathcal{L}((-1,1,1),\ (0,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,3)) \subseteq \mathbb{R}^3$;

(v) $\mathcal{L}((-1,1,1),\ (0,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0)) \subseteq \mathbb{R}^3$;

(vi) $\mathcal{L}((-1,-1,-1),\ (0,0,0),\ (-1,-1,1),\ (-1,1,1),\ (1,1,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$;

(vii) $\mathcal{L}(1,\ \ x^3+x+1,\ \ -1-x+x^2,\ \ x^3-x^2+2x+3,\ \ 2x^2-2x-2) \subseteq \mathbb{R}[x]$;

(viii) $\mathcal{L}(2,\ \ 2x+2,\ \ 1,\ \ 2x+2+2x^2) \subseteq \mathbb{R}[x]$;

(ix) $\mathcal{L}(\pi+e,\ \ x+2,\ \ x-2+2000x^2) \subseteq \mathbb{R}[x]$;

(x) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & e \end{pmatrix}\right) \subseteq M_2(\mathbb{R})$;

(xi) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \subseteq M_2(\mathbb{R})$;

(xii) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \subseteq M_{2,3}(\mathbb{R})$.

Esercizio 26. Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze:

(i) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = M_2(\mathbb{R})$;

(ii) $\mathcal{L}(2,\ \ 2x+2,\ \ 1,\ \ 2x+2+2x^2) = \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$;

(iii) $\mathcal{L}((-1,1,1),\ (0,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0)) = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 27. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti uguaglianze?

(i) $\mathcal{L}(1+x,\ \ kx-1) = \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$;

(ii) $\mathcal{L}((k,1,1),\ (0,0,0),\ (1,k,1),\ (1,1,k)) = \mathbb{R}^3$;

(iii) $\mathcal{L}(x,\ \ kx-1,\ \ kx^2-1,\ \ kx^{100}+1) = \mathbb{R}[x]$.

Esercizio 28. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$ una sua base. Dimostrare che anche $\{v_1-v_2,\ v_2-v_3,\ v_3-v_4,\ v_1+v_4\}$ è base di V. Stabilire poi se $\{\, v_1-v_2,\ v_2-v_3,\ v_3-v_4,\ v_1-v_4\,\}$ è base di V.

Esercizio 29. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ una sua base. Dimostrare che anche $\{v_1,\ v_2,\ v_3+\lambda v_1+\mu v_2\}$ è base di V, per ogni $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 30. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$ costituito dai polinomi a coefficienti reali di grado al più 3 e dal polinomio nullo, si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$U = \{\, f(X) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[X] \ \mid\ f(1) = 0 \,\},$$

$$V = \left\{\, a + (2a-b)X + (a-b)X^3 \ \middle|\ a,b \in \mathbb{R} \,\right\},$$

$$W = \{\, f(X) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[X] \ \mid\ f(-1) = 2 \,\}.$$

(i) Si verifichi che U e V sono sottospazi di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$.

(ii) Stabilire se anche W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$.

Esercizio 31. In ciascuno dei seguenti casi, trovare una base del sottospazio e completarla ad una base dello spazio accanto indicato:

(i) $\mathcal{L}((0,0),\ (1,0),\ (\pi,0)) \subseteq \mathbb{R}^2$;

(ii) $\mathcal{L}((1,0,1),\ (-1,0,-1),\ (0,0,0),\ (2,0,2)) \subseteq \mathbb{R}^3$;

(iii) $\mathcal{L}((0,1,1,1),\ (1,0,-1,0)) \subseteq \mathbb{R}^4$;

(iv) $\mathcal{L}(x+2,\ -x^2+3,\ 0) \subseteq \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$;

(v) $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) \subseteq M_2(\mathbb{R})$.