

Università degli Studi di Roma La Sapienza
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria A.A. 2014-2015
Foglio di esercizi n.5 (prof. Cigliola)

Esercizio 1. Sono dati i vettori $v_1 = (-1, 0, 0)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ e $v_3 = (1, 1, -1)$ di \mathbb{R}^3 . Sia $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per W .

Esercizio 2. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per $W \subseteq \mathbb{R}^4$, dove

$$W = \mathcal{L}((2, -1, 1, 1), (0, 0, 0, 0), (1, -1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (4, -2, 2, 2)).$$

Esercizio 3. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per $U \subseteq \mathbb{R}^3$, dove

$$U = \mathcal{L}((1, -3, -2), (0, -1, -1), (0, 2, 2), (0, 0, 0), (-1, 2, 1)).$$

Esercizio 4. Sia dato il sottospazio di \mathbb{R}^4

$$E = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 2x_1 + x_3 + 2x_4 \}.$$

Si determinino due basi distinte \mathcal{B} e \mathcal{B}' di E . Trovare le matrici del cambiamento di base ed entrambe le equazioni del cambiamento di coordinate nel passaggio da una base all'altra.

Esercizio 5. Sia $W \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici per cui la somma degli elementi della diagonale principale vale 0. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per W .

Esercizio 6. Sia dato $U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ sottospazio di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per U .

Esercizio 7. Sia dato

$$T = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \leq 2, f(-2) = 0 \} \cup \{ 0 \}$$

sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per T .

Esercizio 8. Sia dato S il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]$ definito da

$$S = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-1) = f(1) = 0, \deg f(x) \leq 4 \} \cup \{ 0 \}.$$

sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per S .

Esercizio 9. Sia n un intero positivo. Dimostrare che gli insiemi $Sym_n(\mathbb{R})$, $ASym_n(\mathbb{R})$ sono supplementari in $M_n(\mathbb{R})$. Calcolare inoltre la loro dimensione e determinare una loro base.

Esercizio 10. Sia n un intero positivo. Trovare un sottospazio vettoriale W di $M_3(\mathbb{R})$ tale che $M_3(\mathbb{R}) = ASym_3(\mathbb{R}) \oplus Diag_3(\mathbb{R}) \oplus W$.

Esercizio 11. Si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}((2, k, 1), (k, 2, 0))$ e $W = \mathcal{L}((0, 0, k))$ di \mathbb{R}^3 . Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione ed una base di $U+W$ e di $U \cap W$. Per quali valori di k i sottospazi U e W sono supplementari?

Esercizio 12. Si considerino i sottospazi $S = \mathcal{L}((-1, h, -2), (0, -2, h))$ e $T = \mathcal{L}((h, h, h))$ di \mathbb{R}^3 . Al variare di $h \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione ed una base di $S+T$ e di $S \cap T$. Per quali valori di h S e T sono sottospazi supplementari?

Esercizio 13. Siano dati i sottospazi $A = \mathcal{L}(x^2 - 1, -kx^2 + 1)$ e $B = \mathcal{L}(kx^2 + k, kx + x^2)$ di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione ed una base di $A+B$ e di $A \cap B$. Per quali valori di k il vettore $x^2 - 2kx + 1$ appartiene ad $A+B$?

Esercizio 14. Sia Z il sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare un supplemento di Z .

Esercizio 15. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che l'insieme

$$T = \{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA \}$$

è sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per T .

Esercizio 16. Dimostrare che l'insieme

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a - 2b & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per U .

Esercizio 17. Dimostrare che l'insieme

$$W = \{ a - b + ax + bx^2 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

è sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per W .

Esercizio 18. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ costituito dai polinomi a coefficienti reali di grado al più 3 e dal polinomio nullo, si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{ f(X) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \mid f(1) = 0 \},$$

$$W = \{ -a + (2a + b)X + (-a + b)X^3 \mid a, b \in \mathbb{R} \},$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per U , W , $U + W$ e $U \cap W$.

Esercizio 19. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$, si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{ f(X) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \mid f(-1) = f(0) = 0 \},$$

$$W = \{ a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X] \mid 2a_0 + a_1 - 2a_2 + a_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \},$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per U , W , $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

Esercizio 20. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$, si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{ f(X) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \mid f(-1) = f(0) = 0 \},$$

$$W = \{ a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X] \mid 2a_0 + a_1 - 2a_2 + a_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \},$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per U , W , $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

Esercizio 21. Nello spazio vettoriale $M_{3,2}(\mathbb{R})$, si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}) \mid \begin{cases} a_1 - b_1 + c_1 = 0 \\ a_2 + b_2 - c_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}) \mid \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per U , W , $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

Esercizio 22. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^5 , si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \mathcal{L}((1, 1, 0, -1, 1), (-1, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 0), (0, 2, 0, -1, 2), (0, 1, 0, -1, 0))$$

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per U , W , $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

Esercizio 23. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^5 , si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per U , W , $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

Esercizio 24. Nello spazio vettoriale $M_{2,2}(\mathbb{R})$, si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \begin{cases} a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$W = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per U , W , $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

Esercizio 25. Siano dati

$$V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \}$$

e

$$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \}.$$

Provare che V e W sono sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^2 e verificare che $V \cup W$ non è sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 . Qual è il più piccolo sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 che contiene $V \cup W$? Determinare una sua base.

Esercizio 26. In \mathbb{R}^4 sono dati i vettori $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 2, 2)$. Siano poi $U = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ e

$$W = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - t = 0 \}.$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per U , W , $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

Esercizio 27. In \mathbb{R}^3 siano dati i sottospazi U definito dall'equazione $x + y - z = 0$ e W quello generato da $(2, 4, 6)$ e $(1, 3, 1)$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per U , W , $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

Esercizio 28. Si consideri il sottoinsieme W di $M_2(\mathbb{R})$ definito da

$$U = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = AB \},$$

dove $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sia poi $W = \text{Sym}_2(\mathbb{R})$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un supplemento per U , W , $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

Esercizio 29. Sono dati i sottospazi di \mathbb{R}^4

$$U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \}$$

e

$$V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}.$$

Completare una base di $U \cap V$ ad una base di $U + V$.

Esercizio 30. Sono dati i sottospazi di \mathbb{R}^4

$$U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_4 = x_2 + x_3 = 0 \}$$

e

$$V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}.$$

(i) Calcolare la dimensione di U , V , $U + V$ ed $U \cap V$.

(ii) Completare una base di U , V , $U + V$ ed $U \cap V$ ad una base di \mathbb{R}^4 .

Esercizio 31. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e sia $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una sua base. Siano

$$Y = \mathcal{L}(e_1 - 2e_2; e_1 + e_3; 3e_1 - 4e_2 + e_3)$$

e

$$Z = \mathcal{L}(e_2 - 3e_3; e_1 - 2e_2 + 7e_3).$$

(i) Si determinino basi e dimensioni di Y , Z , $Y \cap Z$ ed $Y + Z$.

(ii) Stabilire se la somma di Y e Z è diretta.

(iii) Trovare un supplemento diretto di $Y \cap Z$ in Y , in Z , in $Y + Z$ ed in V .

Esercizio 32. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 5 e siano E ed F suoi sottospazi di dimensione 3 e 4 rispettivamente. Fornire una stima per le dimensioni di $E + F$ ed $E \cap F$.

Esercizio 33. Siano dati in \mathbb{R}^3 i sottospazi vettoriali E_h , generato dai vettori $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (0, 2, h)$ e $v_3 = (2, 3, h)$, dove h è un parametro reale, ed

$$F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = y + z = 0 \}.$$

Stabilire per quali valori di h si ha che $E_h \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 34. Siano dati in \mathbb{R}^4 il sottospazio E generato da $u_1 = (1, 1, 2, 0)$ ed $u_2 = (0, 1, 0, 1)$, ed il sottospazio F_k definito dalle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z + kw = 0 \end{cases},$$
 con k parametro reale. Per quali valori di k la somma $E + F_k$ è diretta?

Esercizio 35. Si considerino i sottospazi di \mathbb{R}^4

$$V_1 = \mathcal{L}((2, 1, 0, 1), (1, 2, 3, 2), (1, 0, -1, 0))$$

$$V_2 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 2y + z + 2t = 2x - z = y + z + t = 0 \}.$$

- (i) Determinare le dimensioni di V_1 e V_2 .
- (ii) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.