

Università degli Studi di Roma La Sapienza
Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria A.A. 2014-2015
Foglio di esercizi n.9 (prof. Cigliola)

Esercizio 1. Sia data l'applicazione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x, y) = (x - y, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (i) Verificare che F è lineare.
- (ii) Stabilire se F è un automorfismo.
- (iii) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^2 e rispetto alla base $\mathcal{B} = \{ (1, 2), (-1, -1) \}$.
- (iv) Dato il vettore $v = (-1, 3)$, calcolare l'immagine diretta del sottospazio $\mathcal{L}(v)$ e la controimmagine del vettore v sotto l'azione di F .
- (v) Determinare tutti gli autovettori di F e stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x, y) = (x + y, x + y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (i) Stabilire se F è un automorfismo.
- (ii) Determinare tutti gli autovettori di F e stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ tale che

$$F(1) = x^2 \quad F(x) = -1 + x + x^2 \quad F(x^2) = x^2.$$

- (i) Stabilire se F è un automorfismo.
- (ii) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di F .
- (iii) Determinare autovalori ed autospazi di F .
- (iv) Stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia data l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x, y, z) = (x - y + z, 2y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- (i) Determinare $\text{Ker}(F)$ e $\text{Im}(F)$.
- (ii) Dato il vettore $v = (-1, 0, 1)$, calcolare l'immagine diretta del sottospazio $\mathcal{L}(v)$ e la controimmagine del vettore v sotto l'azione di F .

(iii) Stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Sia data l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x, y, z) = (2y, kx - y + kz, 2y), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

dove k è un parametro reale.

- (i) Determinare al variare di k una base di $\text{Ker}(F)$ e $\text{Im}(F)$.
- (ii) Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo F è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo associato rispetto alla base canonica alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Stabilire se f è invertibile.
- (ii) Determinare nucleo ed immagine di f .
- (iii) Determinare gli autovalori di f .
- (iv) Stabilire se f è diagonalizzabile.
- (v) Dimostrare che non esiste nessuna base di \mathbb{R}^4 rispetto a cui la matrice associata

$$\text{ad } f \text{ sia } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $F(0, 0, 1, 0) = (1, 2, 1, 3)$, $\text{Ker}(F) = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0))$ ed avente $(0, 0, 0, 1)$ come autovettore associato all'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$. Stabilire per quali valori di λ F è diagonalizzabile.

Esercizio 8. Si consideri la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Sia data poi l'applicazione $F : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(A) = CAC^{-1}, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R}).$$

- (i) Dimostrare che F è un endomorfismo di $M_2(\mathbb{R})$.
- (ii) Decidere se F è iniettivo.
- (iii) Stabilire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 9. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$f(x, y, z, t) = (2x - y - z, y, z, z + 2t), \quad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

- (i) Stabilire se esiste una base di \mathbb{R}^4 costituita di autovettori di f .
- (ii) Stabilire se f è un isomorfismo.
- (iii) Determinare esplicitamente l'insieme $\{(x, y, z, t) \mid f(x, y, z, t) = (-x, -y, -z, -t)\}$.

Esercizio 10. Stabilire per quali valori di k esiste una base di \mathbb{R}^4 costituita da autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una tale base nel caso $k = 1$.

Esercizio 11. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 - k \\ 0 & 0 & 2k - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con k parametro reale. Sia $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione che ha A come matrice associata rispetto alla base canonica.

- (i) Discutere al variare di k la surgettività di F .
- (ii) Determinare la dimensione di $\text{Ker}(F)$ al variare di k .
- (iii) In corrispondenza dei valori di k per cui $\dim(\text{Ker}(F)) = 2$, scrivere esplicitamente le equazioni di F e stabilire se essa è diagonalizzabile.

Esercizio 12. Sia dato l'endomorfismo diagonalizzabile $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avente base diagonalizzante

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 1, -1)\}.$$

Si sa che 3 è autovalore di f e che $f(v_1) = f(v_2)$.

- (i) Stabilire se f è iniettiva.
- (ii) Stabilire se f è surgettiva.
- (iii) Determinare una base di $\text{Im}(f)$ ed una di $\text{Ker}(f)$.
- (iv) Calcolare esplicitamente $f(x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 13. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definito da

$$F(x, y, z, t) = (y + z, -(1 + k^2)x - 2y - 2z - (1 + k^2)t, x + t, 0)$$

dove k è un parametro reale. Stabilire per quali valori di k F è diagonalizzabile.

Esercizio 14. Sia data l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(a, b, c) = (2b, a - b, b)$. Stabilire per quali valori di k esiste una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^3 per cui

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 15. È dato un endomorfismo non nullo F di \mathbb{R}^3 il cui polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + k^2\lambda,$$

con k parametro reale.

- (i) Per quali valori di k F è un isomorfismo?
- (ii) Per quali valori di k F è diagonalizzabile?

Esercizio 16. Sono dati i seguenti sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^4 :

$$U = \{(x, y, z, t) \mid 2kx + y = 0, z + t = 0, y + z = 0\}$$

$$V = \{(x, y, z, t) \mid x + y + t = z = 0\}$$

$$W = \langle (h, 0, -h, 0), (h + 1, 1, 0, h) \rangle.$$

Dire per quali valori reali di h e k U , V e W sono autospazi di un endomorfismo diagonalizzabile di \mathbb{R}^4 .