Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.10 – Calcolo di derivate

Esercizio 1. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni nel punto x_0 indicato, utilizzando la definizione data:

(i) $f(x) = x^2 + 1 \qquad x_0 = 0;$ $[\,0\,]$

(ii) $f(x) = 1 - x^3 \qquad x_0 = 2;$ $[\,-12\,]$

(iii) $f(x) = \frac{1}{x} \qquad x_0 = 2;$ $[\,-\frac{1}{4}\,]$

(iv) $f(x) = e^{2x} \qquad x_0 = 0;$ $[\,2\,]$

Esercizio 2. Utilizzando la definizione data, calcolare le derivate delle seguenti funzioni, specificandone il dominio:

(i) $f(x) = x^2 + x$ $[\,f'(x) = 2x + 1\,]$

(ii) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ $[\,f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}\,]$

(iii) $f(x) = \sin 3x$ $[\,f'(x) = 3\cos 3x\,]$

(iv) $f(x) = \sqrt{2x+3}$ $[\,f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,]$

Esercizio 3. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{3x-1}$ nel suo punto di ascissa $x_0 = 3$.

Esercizio 4. Mostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua e derivabile.

Esercizio 5. Mostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

è continua ma non derivabile in $x = 0$. Determinare se esistono, le derivate destra e sinistra di f in $x = 0$.

Esercizio 6. Determinare i coefficienti a, b e c della funzione

$$f(x) = ax^4 + bx + c$$

in modo che la derivata terza sia la funzione $f'''(x) = 12x$ e che la curva grafico di f passi per il punto $(0,1)$ avendo ivi come tangente la retta $y = 2x + 1$.

$[\,a = 1/2,\ b = 2 \text{ e } c = 1]$

Esercizio 7. Calcolare il dominio delle seguenti funzioni e delle corrispondenti derivate:

(i) $y = 3\sqrt{x^2+4} - e^x + 17$ $[\,D = D' = \mathbb{R}\,]$

(ii) $y = \log x - 2x$ $[\,D = D' = (0,\ +\infty)\,]$

(iii) $y = \arcsin x + \sin x$ $[\,D = [-1,\ 1] \qquad D' = (-1,\ 1)\,]$

(iv) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

Esercizio 8. Per ciascuna delle seguenti funzioni $f(x)$ calcolare il valore di f e di f' nel punto x_0 accanto indicato:

(i) $f(x) = 8x^3 - e^x + 3\log(x+1)$ per $x_0 = 0$ $[\, f(0) = -1 \text{ e } f'(0) = 2\,]$

(ii) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x} - \cos x$ per $x_0 = \frac{2}{\pi}$ $[\, f(\frac{2}{\pi}) = 1 - \cos(\frac{2}{\pi}) \text{ e } f'(\frac{2}{\pi}) = \sin\frac{2}{\pi}\,]$

Esercizio 9. Si calcolino le derivate delle seguenti funzioni:

(i) $y = 5x + 7$ $[\, y' = 5\,]$

(ii) $y = x^3 + \sqrt{x}$ $[\, y' = 3x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,]$

(iii) $y = \dfrac{1}{5}x^5 - 5^5 + x + \sqrt[3]{x}$ $[\, y' = x^4 + 1 + \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,]$

(iv) $y = 2\log x + e^x + 3x - 100$ $[\, y' = \dfrac{2}{x} + e^x + 3\,]$

(v) $y = (x^2 - 3x + 1)(3 - 4x)$ $[\, y' = -12x^2 + 30x - 13\,]$

(vi) $y = e^x \log x + x^3 - \dfrac{5}{x}$ $[\, y' = \dfrac{3x^4 + e^x x^2 \log x + e^x x + 5}{x^2}\,]$

(vii) $y = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x^2}{2x+1}$ $[\, y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{2x^2 + 2x}{(1+2x)^2}\,]$

(viii) $y = \sin x - \cos x + 2\sin x \cos x$ $[\, y' = \sin x + \cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x\,]$

(ix) $y = \dfrac{1+x^2}{e^x} - 200\cos x$ $[\, y' = 200\sin x - e^{-x}(x-1)^2\,]$

(x) $y = (3x-1)^2$ $[\, y' = 6(3x-1)\,]$

(xi) $y = \dfrac{4}{(x^2+4)^2}$ $[\, y' = -\dfrac{16x}{(x^2+4)^3}\,]$

(xii) $y = \log(2x+3) - \log(\log x)$ $[\, y' = \dfrac{2}{(2x+3)} - \dfrac{1}{x\log x}\,]$

(xiii) $y = e^{-\frac{1}{x}} - 2e^{-x}$ $[\, y' = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} + 2e^{-x}\,]$

(xiv) $y = \log\dfrac{2x-1}{x+1}$ $[\, y' = \dfrac{3}{2x^2 + x - 1}\,]$

(xv) $y = e^{\frac{x+1}{2x-1}}$ $[\, y' = -\dfrac{3\,e^{\frac{x+1}{2x-1}}}{(1-2x)^2}\,]$

(xvi) $y = \sqrt[7]{(2x+\pi)^5}$ $[\, y' = \dfrac{10}{7}(2x+\pi)^{-\frac{2}{7}}\,]$

(xvii) $y = \log\cos x$ $[\, y' = -\operatorname{tg} x\,]$

(xviii) $y = \sqrt{\sin x^2}$ $[\, y' = \dfrac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}\,]$

(xix) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x$ $[\, y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{x^2+1}\,]$

(xx) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$ $[\, y' = -\dfrac{1}{x^2+1}\,]$

(xxi) $y = \sqrt{\arcsin x}$ $[\, y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin x}}\,]$

(xxii) $y = (\sin x)^x$ $[\, y' = (\sin x)^x(x\cot x + \log\sin x)\,]$

(xxiii) $y = \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad [\, y' = -\dfrac{1}{x^2+1} \,]$

(xxiv) $y = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ $\qquad [\, y' = \dfrac{\cos x}{(1-\sin x)^{\frac{3}{2}}\ \sqrt{1+\sin x}} \,]$

(xxv) $y = 2x \arcsin\sqrt{x} - 3\log\dfrac{x}{x+1}$ $\qquad [\, y' = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \dfrac{3}{x+x^2} + 2\arcsin\sqrt{x} \,]$

(xxvi) $y = \sqrt{1-e^{2\cos x}} + \arcsin\sqrt{1-e^{2\cos x}}$ $\qquad [\, y' = \dfrac{\sin x\, e^{\cos x}(e^{\cos x}+1)}{\sqrt{1-e^{2\cos x}}} \,]$

(xxvii) $y = \arccos\sqrt{\dfrac{e^x}{x\log x}}$ $\qquad [\, y' = \frac{e^x(1+\log x - x\log x)}{2x^2\log^2 x}\sqrt{\frac{x^2\log^2 x}{e^x(x\log x - e^x)}} \,]$

Esercizio 10. Calcolare le prime tre derivate delle seguenti funzioni:

(i) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ $\qquad [\, y''' = \dfrac{-48x^3-48x}{(x^2-1)^4} \,]$

(ii) $y = \dfrac{\log x}{x}$ $\qquad [\, y''' = \dfrac{11-6\log x}{x^4} \,]$

(iii) $y = x\sqrt{1-x^2}$ $\qquad [\, y''' = -\dfrac{3}{\sqrt{(1-x^2)^5}} \,]$

Esercizio 11. Verificare che le seguenti funzioni soddisfano l'equazione (differenziale) accanto indicata:

(i) $y = e^x \sin x \qquad y'' - 2y' + 2y = 0.$

(ii) $y = \dfrac{x-3}{x+4} \qquad 2y'^{\,2} = (y-1)y''.$

(iii) $y = e^{-x}\cos x \qquad y^{(4)} + 4y = 0.$