Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.10 – Somma e intersezione di sottospazi vettoriali

Esercizio 1. Sono dati i vettori $v_1 = (-1,0,0)$, $v_2 = (2,1,-1)$ e $v_3 = (1,1,-1)$ di $\mathbb{R}^3$. Sia $W = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento diretto per W.

$$[\dim W = 2,\ \operatorname{codim} W = 1,\ \mathscr{B}_W = \{ v_1, v_2 \},\ W : \begin{cases} x_1 = t + 2s \\ x_2 = s \\ x_3 = -s \end{cases},\ x_2 + x_3 = 0,\ U = \mathscr{L}((0,1,0))]$$

Esercizio 2. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento diretto per $W \subseteq \mathbb{R}^4$, dove

$$W = \mathscr{L}\big((2,-1,1,1),\ (0,0,0,0),\ (1,-1,1,1),\ (1,0,0,0),\ (4,-2,2,2)\big).$$

Esercizio 3. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per $U \subseteq \mathbb{R}^3$, dove

$$U = \mathscr{L}\big((1,-3,-2),\ (0,-1,-1),\ (0,2,2),\ (0,0,0),\ (-1,2,1)\big).$$

Esercizio 4. Sia dato il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$E = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 - x_2 = 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \right\}.$$

Si determinino due basi distinte $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ di E. Trovare le matrici del cambiamento di base ed entrambe le equazioni del cambiamento di coordinate nel passaggio da una base all'altra.

Esercizio 5. Sia dato $U = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per U.

[$\dim U = 2$, $\operatorname{codim} U = 2$, $\mathscr{B}_U = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, detto $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ il generico elemento dello spazio ambiente, U ha equazioni parametriche date da $\begin{cases} x_1 = t + s \\ x_2 = s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ e cartesiane $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$, un complemento diretto è $W : \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$]

Esercizio 6. Sia dato

$$T = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \leqslant 2,\ f(-2) = 0 \} \cup \{ 0 \}$$

sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per T.

[$\dim T = 2$, $\operatorname{codim} T = 1$, una base è $\mathscr{B}_T = \left\{ x + 2,\ x^2 - 4 \right\}$, detto $ax^2 + bx + c$ il generico polinomio dello spazio ambiente, T ha equazioni parametriche date da: $\begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = 2b - 4a \end{cases}$ e cartesiane $\left\{ 4a - 2b + c = 0, \right.$ un complemento è dato da $W = \mathscr{L}(1)$]

Esercizio 7. Sia dato S il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]$ definito da

$$S = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(-1) = f(1) = 0,\ \deg f(x) \leqslant 4 \} \cup \{ 0 \}.$$

sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per S.

[$\dim S = 3$, $\operatorname{codim} T = 2$, una base è $\mathscr{B}_S = \left\{ x^2 - 1,\ x^3 - x,\ x^4 - 1 \right\}$, detto $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ il generico polinomio dello spazio ambiente, S ha equazioni parametriche date da: $\begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = c \\ d = -b \\ e = -a - c \end{cases}$ e cartesiane $\begin{cases} a - b + c - d + e = 0 \\ a + b + c + d + e = 0, \end{cases}$ un complemento è dato da $W = \mathscr{L}(1,\ x)$]

Esercizio 8. Sia n un intero positivo. Dimostrare che gli insiemi $Sym_n(\mathbb{R})$, $ASym_n(\mathbb{R})$ sono complementari in $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calcolare inoltre la loro dimensione e determinare una loro base.

[le dimensioni valgono rispettivamente $\frac{n^2+n}{2}$, $\frac{n^2-n}{2}$ e n]

Esercizio 9. Si considerino i sottospazi $U = \mathscr{L}((2,k,1),\ (k,2,0))$ e $W = \mathscr{L}((0,0,k))$ di $\mathbb{R}^3$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione ed una base di $U + W$ e di $U \cap W$. Per quali valori di k i sottospazi U e W sono complementari (ovvero si ha $U \oplus W = \mathbb{R}^3$)?

[per $k \neq 0, 2, -2$ si ha $\dim U \cap W = 0$ e $\dim U + W = 3$,
per $k = 0$ si ha $\dim U \cap W = 0$ e $\dim U + W = 2$,
per $k = 2, -2$ si ha $\dim U \cap W = 1$ e $\dim U + W = 2$,
gli spazi sono complementari per $k \neq 0, 2, -2$]

Esercizio 10. Si considerino i sottospazi $S = \mathscr{L}((-1,h,-2),\ (0,-2,h))$ e $T = \mathscr{L}((h,h,h))$ di $\mathbb{R}^3$. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione ed una base di $S + T$ e di $S \cap T$. Per quali valori di h S e T sono sottospazi complementari?

Esercizio 11. Siano dati i sottospazi $A = \mathscr{L}(x^2 - 1,\ -kx^2 + 1)$ e $B = \mathscr{L}(kx^2 + k,\ kx + x^2)$ di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione ed una base di $A + B$ e di $A \cap B$. Per quali valori di k il vettore $x^2 - 2kx + 1$ appartiene ad $A + B$?

Esercizio 12. Sia Z il sottospazio di $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix}$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare un sottospazio complementare di Z.

[per ogni k si usi $Z = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$]

Esercizio 13. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che l'insieme

$$T = \{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA \}$$

è sottospazio vettoriale di $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per T.

Esercizio 14. Dimostrare che l'insieme

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a - 2b & 0 \\ b & -a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è sottospazio vettoriale di $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per U.

Esercizio 15. Dimostrare che l'insieme

$$W = \left\{ a - b + ax + bx^2 \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per W.

Esercizio 16. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$, si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{\, f(X) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[X] \;\mid\; f(1) = 0 \,\},$$
$$W = \left\{\, a + (b-2a)X + (a-b)X^3 \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \,\right\},$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per U, W, $U+W$ e $U \cap W$.

Esercizio 17. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[X]$, si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \{\, f(X) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[X] \;\mid\; f(-1) = f(0) = 0 \,\},$$
$$W = \left\{\, a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; 2a_0 + a_1 - 2a_2 + a_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \,\right\},$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per U, W, $U+W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta. Completare una base di $U \cap W$ ad una base di W.

$$[\mathscr{B}_U = \left\{\, x^3 + x,\; x^2 + x \,\right\}, \begin{cases} a_3 = a_3 \\ a_2 = a_3 + a_1 \\ a_1 = a_1 \\ a_0 = a_0 \end{cases}, \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_3 + a_1 - a_2 = 0 \end{cases}, \dim U = 2, \operatorname{codim} U = 2$$

$$\mathscr{B}_W = \left\{\, x^3 - x,\; x^2 - 3x + 3 \,\right\}, \begin{cases} a_3 = a_3 \\ a_2 = a_2 \\ a_1 = -3a_2 - a_3 \\ a_0 = 3a_2 \end{cases}, \begin{cases} 2a_0 + a_1 - 2a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}, \dim W = \operatorname{codim} W = 2;$$

$U + W = \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$ e $U \cap W = \{\, 0 \,\}$, U e W sono spazi complementari]

Esercizio 18. Nello spazio vettoriale $\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{cases} a_1 - b_1 + c_1 = 0 \\ a_2 + b_2 - c_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per U, W, $U+W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

$$[\mathscr{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \mathscr{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$U + W = \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $\mathscr{B}_{U\cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, U e W non sono a somma diretta]

Esercizio 19. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$, si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \mathscr{L}((1,1,0,-1,1),\; (-1,1,0,0,1),\; (0,0,0,0,0),\; (0,2,0,-1,2),\; (0,1,0,-1,0))$$

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per U, W, $U+W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

[U e W non possono essere a somma diretta,
$\mathscr{B}_U = \{(1,1,0,-1,1),\; (-1,1,0,0,1),\; (0,1,0,-1,0)\}$
$\mathscr{B}_W = \{(1,0,-1,0,1),\; (0,1,1,0,0),\; (0,0,0,1,2)\}$
$\mathscr{B}_{U+W} = \{(1,1,0,-1,1),\; (-1,1,0,0,1),\; (0,1,0,-1,0),\; (1,0,-1,0,1),\; (0,1,1,0,0)\}$,
$\mathscr{B}_{U\cap W} = \{(0,0,0,1,2)\}$]

Esercizio 20. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$, si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$W = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per U, W, $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

Esercizio 21. Nello spazio vettoriale $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \left\{ a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = 0 \right. \right\}$$

$$W = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per U, W, $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

Esercizio 22. Siano dati

$$V = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y = 0 \right\}$$

e

$$W = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - y = 0 \right\}.$$

Provare che V e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ e verificare che $V \cup W$ non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Qual è il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ che contiene $V \cup W$? Determinare una sua base.

Esercizio 23. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 2, 2)$. Siano poi $U = \mathscr{L}(v_1, v_2, v_3)$ e

$$W = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + z - t = 0 \right\}.$$

Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche per U, W, $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

Esercizio 24. In $\mathbb{R}^3$ siano dati i sottospazi U definito dall'equazione $x + y - z = 0$ e W quello generato da $(2, 4, 6)$ e $(1, 3, 1)$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per U, W, $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

Esercizio 25. Si consideri il sottoinsieme W di $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ definito da

$$U = \{ A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\mid\; A = AB \},$$

dove $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sia poi $W = Sym_2(\mathbb{R})$. Determinare la dimensione, la codimensione, una base, equazioni cartesiane, equazioni parametriche ed un complemento per U, W, $U + W$ e $U \cap W$. Dire se U e W sono a somma diretta.

[$\mathscr{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathscr{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
$\mathscr{B}_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $U + W = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$]

Esercizio 26. Sono dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

e

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Completare una base di $U \cap V$ ad una base di $U + V$.

Esercizio 27. Sono dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 - x_2 + x_4 = x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

e

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

(i) Calcolare la dimensione di U, V, $U + V$ ed $U \cap V$.

[rispettivamente $2, 2, 3, 1$]

(ii) Completare una base di U, V, $U + V$ ed $U \cap V$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 28. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e sia $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una sua base. Siano

$$Y = \mathscr{L}(e_1 - 2e_2;\; e_1 + e_3;\; 3e_1 - 4e_2 + e_3)$$

e

$$Z = \mathscr{L}(e_2 - 3e_3;\; e_1 - 2e_2 + 7e_3).$$

(i) Si determinino basi e dimensioni di Y, Z, $Y \cap Z$ ed $Y + Z$.

[$\mathscr{B}_Y = \{ e_1 - 2e_2;\; e_1 + e_3 \}$

$\mathscr{B}_Z = \{ e_2 - 3e_3;\; e_1 - 2e_2 + 7e_3 \}$

$\mathscr{B}_{Y \cap Z} = \{e_1 - 2e_2 + 7e_3\}$

$\mathscr{B}_{Y+Z} = \{e_1 - 2e_2;\; e_1 + e_3;\; e_2 - 3e_3\}$]

(ii) Stabilire se la somma di Y e Z è diretta.

[la somma non può essere diretta perché i quattro generatori di Y e Z non coinvolgono il vettore v_4]

(iii) Trovare un complemento diretto di $Y \cap Z$ in Y, in Z, in $Y + Z$ ed in V.

Esercizio 29. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 5 e siano E ed F suoi sottospazi di dimensione 3 e 4 rispettivamente. Fornire una stima per le dimensioni di $E + F$ ed $E \cap F$.

[$4 \leqslant \dim E + F \leqslant 5$, $2 \leqslant \dim E \cap F \leqslant 3$]

Esercizio 30. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i sottospazi vettoriali E_h, generato dai vettori $v_1 = (2,\, 1,\, 0)$, $v_2 = (0,\, 2,\, h)$ e $v_3 = (2,\, 3,\, h)$, dove h è un parametro reale, ed

$$F = \left\{ (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y = y + z = 0 \right\}.$$

Stabilire per quali valori di h si ha che $E_h \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 31. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio E generato da $u_1 = (1, 1, 2, 0)$ ed $u_2 = (0, 1, 0, 1)$, ed il sottospazio F_k definito dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z + kw = 0 \end{cases}$, con k parametro reale. Per quali valori di k la somma $E + F_k$ è diretta?

[$k \neq 1/3$]

Esercizio 32. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$V_1 = \mathscr{L}((2, 1, 0, 1),\; (1, 2, 3, 2),\; (1, 0, -1, 0))$$

$$V_2 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 2y + z + 2t = 2x - z = y + z + t = 0\right\}.$$

(i) Determinare le dimensioni di V_1 e V_2.

(ii) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.

Esercizio 33. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$. Considerare in V i sottospazi:

$$U = \mathscr{L}(v_1 + 2v_3 - v_4, \quad v_1 - v_2 + v_3 - v_4, \quad v_1 + v_2)$$
$$W = \mathscr{L}(v_1 + v_2 + v_3, \quad v_2 + v_3 + v_4, \quad v_1 - v_2 - v_4)$$

(i) Trovare le dimensioni di $U \cap W$ e $U + W$.

[$\dim U + W = 4$, $\dim U \cap W = 2$]

(ii) Stabilire se U e W sono sottospazi complementari. [no]

(iii) Completare una base di $U \cap W$ ad una base di $U + W$.

[$\mathscr{B}_{U \cap W} = \{3v_1 + 2v_2 + 2v_3 - v_4;\ 2v_1 + v_3 - v_4\}$
$\mathscr{B}_{U+W} = \{3v_1 + 2v_2 + 2v_3 - v_4;\ 2v_1 + v_3 - v_4;\ v_1 + 2v_3 - v_4;\ v_1 + v_2 + v_3\}$]