

Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2015-2016 – prof. Cigliola
Foglio n.11 – Geometria affine del piano

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti terne di punti A, B, C del piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, determinare, se possibile, un quarto punto D affinché $ABCD$ sia un parallelogramma:

- (i) $A = (1, 3) \quad B = (-5, 1) \quad C = (3, -5)$;
- (ii) $A = (1, 1) \quad B = (-5, -5) \quad C = (3, 3)$;
- (iii) $A = (-1, 2) \quad B = (-2, 1) \quad C = (3, -4)$;
- (iv) $A = (0, 3) \quad B = (-3, 0) \quad C = (3, 0)$;
- (v) $A = (0, 3) \quad B = (1, 5) \quad C = (-2, -1)$;
- (vi) $A = (e, \pi) \quad B = (\pi, e) \quad C = (0, 0)$.

Per ciascuno dei parallelogrammi costruiti, si trovi l'equazione delle rette su cui giacciono i suoi lati.

Esercizio 2. Dati il vettore $v \in \mathcal{V}^2$ ed il punto $P \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, determinare l'unico punto $Q \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$:

- (i) $v = (-1, 2) \quad P = (3, -1)$;
- (ii) $v = (1, \frac{1}{2}) \quad P = (2, 1)$;
- (iii) $v = (0, 0) \quad P = (3, -2)$;
- (iv) $v = (1, 2) \quad P = (\sqrt{3}, -1)$;
- (v) $v = (2, \pi) \quad P = (0, -\pi)$.

Esercizio 3. Sia $\{O, e_1, e_2\}$ un sistema di riferimento affine in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Si dimostri che anche $\{O, v_1 = 2e_1 + e_2, v_2 = -e_1 + 2e_2\}$ è un sistema di riferimento affine in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 4. Per ciascun vettore $v \in \mathcal{V}^2(\mathbb{R})$ e per ogni punto $A \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta parallela a v passante per A :

- (i) $v = (-1, 3) \quad A = (-3, -2); \quad \left[\begin{cases} x = -3 - t \\ y = -2 + 3t \end{cases} \quad 3x + y + 11 = 0 \right]$
- (ii) $v = (1, 1) \quad A = (-2, -5); \quad \left[\begin{cases} x = -2 + s \\ y = -5 + s \end{cases} \quad x - y - 3 = 0 \right]$
- (iii) $v = (-1, \frac{1}{3}) \quad A = (-13, 52);$
- (iv) $v = (-\sqrt{2}, 0) \quad A = (0, 0); \quad \left[\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad y = 0 \right]$
- (v) $v = (-2, 1) \quad A = (-3, -2).$

Esercizio 5. Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per i punti A e B , dove:

- (i) $A = (-1, 4) \quad B = (3, 1); \quad [3x + 4y - 13 = 0, \left. \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 4 - 3t \end{cases} \right]$
- (ii) $A = (1, 2) \quad B = (-1, -1); \quad [3x - 2y + 1 = 0]$
- (iii) $A = (\pi, 2) \quad B = (\pi, 1); \quad [x = \pi, \left. \begin{cases} x = \pi \\ y = t \end{cases} \right]$
- (iv) $A = (1, 5) \quad B = (-\frac{1}{2}, 5); \quad [y = 5]$

$$(v) \quad A = (3, -2) \quad B = (3, 1). \quad [x = 3, \begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases}]$$

Esercizio 6. Stabilire se i punti A, B, C sono allineati. In caso affermativo, determinare la retta che li contiene:

$$(i) \quad A = (-1, 2) \quad B = (2, 3) \quad C = (-1, 3); \quad [\text{non allineati}]$$

$$(ii) \quad A = (-1, 2) \quad B = (2, 2) \quad C = (-1, 2); \quad [y = 2]$$

$$(iii) \quad A = (1, -2) \quad B = (-3, 1) \quad C = (-2, \frac{2}{3}); \quad [\text{non allineati}]$$

$$(iv) \quad A = (-1, 2) \quad B = (0, 5) \quad C = (1, 8); \quad [y = 3x + 5]$$

$$(v) \quad A = (2, 3) \quad B = (7, 0) \quad C = (-3, -6).$$

Esercizio 7. Determinare la posizione reciproca delle rette r ed s e, se sono incidenti, determinare il loro punto di intersezione:

$$(i) \quad r : 2x - 3y - 1 = 0 \quad s : 4x - 6y + 2 = 0; \quad [\text{parallele}]$$

$$(ii) \quad r : x + 2y - 2 = 0 \quad s : -3x + 2y + 1 = 0; \quad [\text{incidenti in } (3/4, 5/8)]$$

$$(iii) \quad r : -3x - 2y - 1 = 0 \quad s : 4x - 6y + 2 = 0;$$

$$(iv) \quad r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \quad s : 2x - 3y + 2 = 0;$$

$$(v) \quad r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 - 4t \end{cases} \quad s : 4x + y + 2 = 0; \quad [\text{parallele}]$$

$$(vi) \quad r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 \end{cases} \quad s : x - y + \sqrt{2} = 0; \quad [\text{incidenti in } (-1 - \sqrt{2}, -1)]$$

$$(vii) \quad r : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 + 3t \end{cases} \quad s : 5x - 2 = 0;$$

$$(viii) \quad r : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 + 3t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 7 - 3t; \end{cases} \quad [\text{parallele}]$$

$$(ix) \quad r : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -2 + 3t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 - 3t; \end{cases} \quad [\text{parallele}]$$

$$(x) \quad r : \begin{cases} x = 4t \\ y = -3 - 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t; \end{cases}$$

$$(xi) \quad r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 3t. \end{cases}$$

Esercizio 8. Trovare l'equazione della retta passante per il punto d'intersezione delle rette $r : 3x - y + 7 = 0$, $r' : y = x + 5$ e parallela alla retta $s : 2x - 4y - 1 = 0$.

Esercizio 9. Determinare tutte le rette del piano che

$$(i) \quad \text{sono disgiunte dalla retta } 2x - y + 3 = 0. \quad [\text{le rette di tipo } ax + by + c = 0 \text{ con } a + 2b \neq 0]$$

$$(ii) \quad \text{non passano per l'origine.} \quad [\text{le rette di tipo } ax + by + c = 0 \text{ con } c \neq 0]$$

$$(iii) \quad \text{non passano per il punto } A = (2, -1).$$

Esercizio 10. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$, classificare la posizione reciproca delle rette

$$r : kx + y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad r' : x + ky - h = 0.$$

[le rette sono incidenti per $k \neq \pm 1$ (si dica in quale punto); per $k = h = 1$ le rette coincidono con $x + y = 1$; per $k = h = -1$ le rette coincidono con $x - y = -1$; nei casi rimanenti sono parallele]

Esercizio 11. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$, stabilire se i seguenti punti sono allineati: $A(1, 1+k)$, $B(-1, 2k)$ e $C(k, k)$. [allineati se e solo se $k = 1 \pm \sqrt{2}$]