Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.12 – Applicazioni del calcolo differenziale

Esercizio 1. Usando la definizione, provare che la funzione $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + 2\cos^2 x}$ ha in $x_0 = \frac{\pi}{4}$ un massimo locale ed assoluto.
[Si ha che $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Si risolva ora la disequazione $f(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}$. Essendo questa verificata da ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo così ottenuto la tesi.]

Esercizio 2. Usando la definizione, provare che la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}$ ha in $x = 0$ e in $x = -2$ rispettivamente un massimo e un minimo locale.
[Si proceda come sopra. Per trovare un punto di estremo locale la diseguaglianza deve produrre un intorno di tale punto. Ad esempio, $f(0) = -1$. Risolta la diseguaglianza $\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1} \leqslant -1$, otteniamo $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ che realizza un intorno di $x = 0$ il quale è pertanto un punto di massimo locale. Tale massimo non è assoluto, infatti $f(2) = 7 > -1$.]

Esercizio 3. Tracciare il grafico della funzione $f(x) = |x-1| + |x|$. Individuare i suoi punti di minimo.

[Tutti i punti nell'intervallo $[0,1]$ sono di minimo locale.]

Esercizio 4. Determinare i punti di massimo locale, di minimo locale e i punti di flesso a tangente orizzontale delle seguenti funzioni:

(i) $y = x^3 - 2x^2 - 1$ [$x = 0$ punto di massimo, $x = \frac{4}{3}$ punto di minimo]

(ii) $y = 3x^3 - 18x + 7$ [$x = -\sqrt{2}$ punto di massimo, $x = \sqrt{2}$ punto di minimo]

(iii) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3$ [$x = 0$ punto di flesso a tg. or., $x = 1$ punto di minimo]

(iv) $y = \dfrac{1}{5}x^5 + 3$ [$x = 0$ punto di flesso a tg. or.]

(v) $y = -\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 2x + 1$ [$x = 2$ punto di massimo, $x = 1$ punto di flesso a tg. or.]

(vi) $y = \dfrac{x^2 + 4}{(x+1)^2}$ [$x = 4$ punto di minimo]

(vii) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ [$x = 1$ punto di minimo, $x = -1$ punto di massimo]

(viii) $y = x + \log|x|$ [$x = -1$ punto di massimo]

(ix) $y = x + 5\log x$ [non ci sono punti stazionari]

(x) $y = x^2 e^x$ [$x = 0$ punto di minimo, $x = -2$ punto di massimo]

(xi) $y = x^3 e^{-x}$ [$x = 0$ punto di flesso a tg. or. , $x = 3$ punto di massimo]

(xii) $y = x - \cos x + \sin x$ [$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ punto di minimo, $x = \pi + 2k\pi$ punto di massimo]

(xiii) $y = \dfrac{1}{3}\sin^3 x$ [$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ punto di min., $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ punto di max., $x = k\pi$ flessi]

(xiv) $y = 3\cos x + 2\sin x$ [$x = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2k\pi$ punto di max., $x = \pi + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2k\pi$ punto di min.]

(xv) $y = \sqrt{1 - x^2}$

[$x = \pm 1$ punti di minimo relativi ed assoluti non stazionari, $x = 0$ punto di massimo non stazionario]

(xvi) $y = x + \sqrt{1 - x^2}$ [$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ punto di massimo, minimi non stazionari per $x = \pm 1$]

(xvii) $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$ [$x = -\frac{2}{3}$ punto di massimo stazionario, minimi non stazionari per $x = 0$]

(xviii) $y = \log \sin^2 x + \log \sin x$ [massimi per $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$]

(xix) $y = x^x$ [minimo per $x = e^{-1}$]

(xx) $y = |x|^x$ [massimo per $x = -e^{-1}$, minimo per $x = e^{-1}$]

Esercizio 5. Calcolare il massimo ed il minimo delle seguenti funzioni nell'intervallo accanto indicato:

(i) $y = \sqrt{1 + |x|}$ in $[-1, 3]$
[il massimo vale 2 ed è assunto per $x = 3$, il minimo vale 1 ed è assunto quando $x = 0$]

(ii) $y = x^3 - 2x + 1$ in $[-1, 1]$ [massimo per $x = -\sqrt{6}/3$, minimo per $x = \sqrt{6}/3$]

(iii) $y = x^4 - 3x^2$ in $[0, 3]$ [massimo per $x = 3$, minimo per $x = \sqrt{6}/2$]

(iv) $y = \sqrt{2x + 3}$ in $[0, 1]$ [massimo per $x = 1$, minimo per $x = 0$]

(v) $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$ in $[\frac{1}{2}, 3]$ [massimo per $x = 3$, minimo per $x = 1$]

(vi) $y = e^x - x$ in $[-1, 1]$ [massimo per $x = 1$, minimo per $x = 0$]

(vii) $y = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$ in $[0, \frac{2}{3}\pi]$ [massimo per $x = 0$, minimo per $x = \frac{\pi}{2}$]

(viii) $y = x + \log x$ in $[1, e]$ [massimo per $x = e$, minimo per $x = 1$]

Esercizio 6. Studiare la convessità delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 + 1}$ [convessa per $-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0$ o $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$]

(ii) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ [sempre concava]

(iii) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ [convessa per $x < -1$]

(iv) $f(x) = \log\left(3 + \dfrac{2}{x}\right)$ [convessa per $x > 0$]

(v) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x}{x + 1}\right)$ [convessa per $x > 0$]

(vi) $f(x) = \dfrac{\sin x \cos x + 2\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ [convessa per $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$]

(vii) $f(x) = \log \cos x + \sqrt{3}x$ [sempre concava]

(viii) $f(x) = \log |x| + x$ [sempre concava]

(ix) $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x - x$ [convessa per $x < 0$]

(x) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ [convessa per $-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 0$ o $0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$]

Esercizio 7. Calcolare i punti di flesso delle seguenti funzioni:

(i) $y = x^2 + 6x - 3$ [non ci sono flessi]

(ii) $y = x^3 - 2x + 1$ [$(0; 1)$]

(iii) $y = x^4$ [non ci sono flessi]

(iv) $y = \dfrac{1}{2 - 3x + x^2}$ [non ci sono flessi]

(v) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ [$(0; 0)$]

(vi) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ [non ci sono flessi]

(vii) $y = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$ [flessi per $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$]

(viii) $y = \log x + 2x^2$ [$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \log 2\right)$]

(ix) $y = e^{-x^2} + x$ [$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; e^{-\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$]

Esercizio 8. Provare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{per } x \geqslant -1 \\ -\sqrt{-x-1} & \text{per } x < -1 \end{cases}$$

ha in $x_0 = -1$ ha un punto di flesso a tangente verticale.

Esercizio 9. Trovare i valori di k per cui la funzione $f(x) = x^3 - 6x^2 + kx + 1$ ha dei massimi o dei minimi. [$k < 12$]

Esercizio 10. Al variare del parametro reale a, discutere i massimi ed i minimi della funzione:

$$f(x) = \frac{ax + 2}{x^2 - 2ax}$$

[La derivata prima della funzione è $f'(x) = -\dfrac{ax^2 + 4x - 4a}{x^2(x-2a)^2}$. La funzione è quindi crescente per $ax^2 + 4x - 4a < 0$. Se $a = 0$ non ci sono né massimi né minimi locali. Se $a \neq 0$ la funzione ha un punto di massimo ed un punto di minimo locale (non assoluti). Per $a > 0$ il minimo precede il massimo, per $a < 0$ viceversa.]

Esercizio 11. Studiare i punti di non derivabilità delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = (2x - 3)\sqrt[3]{x}$ [definita e continua su $\mathbb{R}$, ha in $(0; 0)$ un flesso a tangente verticale]

(ii) $f(x) = (x-1)^2|x-1|$ [continua e derivabile su $\mathbb{R}$]

(iii) $f(x) = \sqrt[3]{x}\sqrt{x^2-1}$ [continua e derivabile dove definita]

(iv) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+2} & \text{per } x < -1 \\ -\frac{2}{3}|x| + \frac{5}{3} & \text{per } -1 \leqslant x < 1 \\ \sqrt[3]{(2-x^2)} & \text{per } x \geqslant 1 \end{cases}$

[definita e continua su $\mathbb{R}$; ha in $(-2; 0)$ un flesso a tangente verticale, due punti angolosi in $(-1, 1)$ e $(0, \frac{5}{3})$ e una cuspide in $(2, 0)$]

(v) $f(x) = \begin{cases} x \log|x| & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ [l'origine è un flesso a tangente verticale]

(vi) $f(x) = \begin{cases} x^2 \log|x| & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ [continua e derivabile in $\mathbb{R}$]