Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.12 – Geometria affine dello spazio

Esercizio 1. Stabilire se i seguenti punti A, B, C, D di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sono complanari:

(i) $A = (0,0,0)$ $B = (1,-1,1)$ $C = (3,3,2)$ $D = (-1,-2,1)$;

(ii) $A = (3,1,-2)$ $B = (4,-2,0)$ $C = (5,2,-6)$ $D = (6,-1,-4)$;

(iii) $A = (1,0,0)$ $B = (0,0,-1)$ $C = (2,3,-2)$ $D = (2,3,-3)$;

(iv) $A = (1,-1,2)$ $B = (2,-2,3)$ $C = (0,-1,-2)$ $D = (-1,-1,2)$;

(v) $A = (2,0,3)$ $B = (3,0,4)$ $C = (3,1,4)$ $D = (1,0,2)$.

Per ciascuna quaterna di punti complanari, determinare un piano che li contiene. È unico tale piano?

Esercizio 2. Stabilire se i punti $A, B, C \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sono allineati. In caso affermativo, determinare la retta che passa per essi, in caso negativo il piano che li contiene:

(i) $A = (3,0,-2)$ $B = (4,-1,-4)$ $C = (2,1,0)$;

(ii) $A = (2,2,2)$ $B = (1,1,-1)$ $C = (-1,2,3)$;

(iii) $A = (1,0,0)$ $B = (1,0,-\pi)$ $C = (0,0,1)$;

(iv) $A = (3,4,2)$ $B = (5,-1,1)$ $C = (2,-3,-2)$;

(v) $A = (-3,2,1)$ $B = (-4,2,3)$ $C = (-5,2,-1)$.

Esercizio 3. Determinare, se possibile, per ciascuna delle seguenti terne di punti dello spazio una retta ed un piano che le contiene:

(i) $A = (4,2,0)$ $B = (1,3,1)$ $C = (1,3,5)$;

[allineati, $r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -t, \\ z = -2 - 2t \end{cases}$ $\pi : \begin{cases} x = 3 + t + t' \\ y = -t, \\ z = -2 - 2t \end{cases}$]

(ii) $A = (1,-2,1)$ $B = (2,-1,2)$ $C = (1,-1,2)$;

(iii) $A = (2,1,0)$ $B = (2,0,3)$ $C = (2,2,-3)$;

(iv) $A = (1,-2,1)$ $B = (2,1,0)$ $C = (0,-5,2)$;

(v) $A = (1,-2,1)$ $B = (2,0,3)$ $C = (1,-3,4)$.

Esercizio 4. Sia $\{ O, e_1, e_2, e_3 \}$ un sistema di riferimento affine in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Si dimostri che anche $\{ O,\ v_1 = 2e_1 + e_2 - e_3,\ v_2 = -e_1 + 2e_2,\ v_3 = e_3 \}$ è un sistema di riferimento affine in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Determinare le equazioni del cambiamento di coordinate da un sistema di riferimento all'altro.

Esercizio 5. Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta parallela a v e passante per A, dove:

(i) $v = (-1,2,3)$ $A = (0,-3,-2)$;

(ii) $v = (1,1,0)$ $A = (1,1,0)$;

(iii) $v = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3})$ $A = (-2,1,1)$.

Esercizio 6. Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per i punti A e B, dove:

(i) $A = (-1,-1,0)$ $B = (-3,1,0)$;

(ii) $A = (2,1,2)$ $B = (1,1,-1)$;

(iii) $A = (\frac{3}{2}, \frac{8}{5}, 1)$ $B = (-\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 3)$.

Esercizio 7. Determinare la posizione reciproca delle rette r ed s; se sono incidenti determinare il loro punto di intersezione, se sono complanari, determinare un piano che le contiene:

(i) $r: \begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x+z+1=0 \\ 3x+4y+2=0 \end{cases}$ [sghembe]

(ii) $r: \begin{cases} x-y+z=1 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x=t-3 \\ y=-t \\ z=-2t+6 \end{cases}$ [parallele e distinte, $\pi:\ 3x-y-2z+3=0$]

(iii) $r: \begin{cases} x=t+2 \\ y=-t-1 \\ z=3t+4 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x=t+3 \\ y=t+3 \\ z=t+4 \end{cases}$ [sghembe]

(iv) $r: \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x=2-t \\ y=-1+2t \\ z=-1+3t \end{cases}$ [incidenti in $P(1,1,2)$, $\pi:\ x-y+z-2=0$]

(v) $r: \begin{cases} x-y-z+2=0 \\ 3y+z-1=0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=3t \end{cases}$ [sghembe]

(vi) $r:\ 1-x=y=z-1$ $\quad s: \begin{cases} x=2t \\ y=-2t+1 \\ z=-2t+2 \end{cases}$ [coincidenti]

(vii) $r: \begin{cases} x-y+z+1=0 \\ y+3z+2=0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} 2x+8z+1=0 \\ x+y+7z-1=0 \end{cases}$ [sghembe]

Esercizio 8. Determinare la posizione reciproca tra la retta r e il piano π:

(i) $r: \begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ $\quad \pi:\ 3x+4y+2=0$ [incidenti in $(8,-13/2,19/2)$]

(ii) $r: \begin{cases} x-y+z=1 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ $\quad \pi: \begin{cases} x=t'+t-3 \\ y=-t'-2t \\ z=2t'-2t+6 \end{cases}$ [incidenti in $P=(-13/2,15/2,15)$]

(iii) $r: \begin{cases} x=t+2 \\ y=-t-1 \\ z=3t+4 \end{cases}$ $\quad \pi: \begin{cases} x=t'-t+3 \\ y=-t'+t+3 \\ z=2t'-3t+4 \end{cases}$ [paralleli]

(iv) $r: \begin{cases} x-y+z=2 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ $\quad \pi: \begin{cases} x=2-t+2t' \\ y=-1+2t-t' \\ z=-1+3t+2t' \end{cases}$ [incidenti]

(v) $r: \begin{cases} x-y-z+2=0 \\ 3y+z-1=0 \end{cases}$ $\quad \pi: \begin{cases} x=1+2t-t' \\ y=1-t+t' \\ z=3t \end{cases}$ [paralleli]

(vi) $r:\ 1-x=y=z-1$ $\quad \pi: \begin{cases} x=2t-t'-3 \\ y=t-2'+1 \\ z=3t+t' \end{cases}$

(vii) $r: \begin{cases} x-y+z+1=0 \\ y+3z+2=0 \end{cases}$ $\quad \pi:\ 2x-2y+2z+1=0$

Esercizio 9. Determinare la posizione reciproca tra i piani π e σ:

(i) $\pi:\ x+y+z=1 \qquad \sigma:\ 3x+4y+2=0$ [incidenti]

(ii) $\pi:\ x-3y+2z=1 \qquad \sigma:\ 2x-6y+4z=5$ [paralleli]

(iii) $\pi:\ x-y+z=8 \qquad \sigma: \begin{cases} x=2t-t'-3 \\ y=-2t+t' \\ z=2t'+6 \end{cases}$ [incidenti]

(iv) $\pi: \begin{cases} x=t+t'+2 \\ y=-t-2t'-1 \\ z=-3t+t'+4 \end{cases} \qquad \sigma: \begin{cases} x=t+3 \\ y=t+3t'+3 \\ z=t+4 \end{cases}$ [incidenti]

(v) $\pi: \begin{cases} x=t+t'+2 \\ y=-t-2t'-1 \\ z=-3t+t'+4 \end{cases} \qquad \sigma: \begin{cases} x=2t-t'+3 \\ y=-3t+2t'-2 \\ z=-2t-t'+1 \end{cases}$ [coincidenti]

Esercizio 10. Siano dati nello spazio due rette sghembe r ed r' ed un punto $P \notin r \cup r'$. Dimostrare che esiste una retta s passante per P e complanare con r ed r'. Dedurne che la relazione di complanarità non è transitiva nello spazio.

Esercizio 11. Dato il punto P e le rette sghembe r ed r', trovare una retta s passante per P e complanare con r ed r':

(i) $P=(0,0,2) \qquad r: \begin{cases} 2x-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 3x+2z=0 \end{cases}$

(ii) $P=(1,1,-1) \qquad r: \begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x+y-3z=2 \\ y+z=1 \end{cases}$

(iii) $O=(0,0,0) \qquad r: \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ [l'asse $z: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$]

Esercizio 12. Dato il punto P e le rette sghembe r ed r':

(i) $P=(-1,0,2) \qquad r: \begin{cases} 2x-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 3x+2z=0 \end{cases}$

(ii) $P=(-1,1,-1) \qquad r: \begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x+y-3z=2 \\ y+z=1 \end{cases}$

(a) trovare, se esiste, un piano α passante per P e parallelo ad r ed r';

(b) trovare, se esiste, un piano passante per P, contenente r e parallelo a r';

(c) trovare, se esiste, una retta passante per P incidente sia r che r'.

Esercizio 13. Scrivere le equazioni cartesiane e parametriche del piano π passante per i punti $P=(1,1,1)$ e $Q=(2,1,2)$ e parallelo alla retta $r: \begin{cases} x=t \\ y=-1-3t. \\ z=4-2t \end{cases}$

[$\pi:\ x+y-z-1=0 \quad \begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=t+s-1 \end{cases}$]

Esercizio 14. Trovare una retta r passante per il punto $P=(1,-1,0)$ e parallela al piano $\pi: 2x-y+4=0$. È unica tale retta?

[si trovano tutte le rette del piano $\pi' : \ 2x - y = 3$ passanti per P]

Esercizio 15. Trovare il piano passante per il punto $P = (1, 1, 5)$ e parallelo al piano $\pi : \ x - 3y - z = 1$.

[$\pi' : \ x - 3y - z + 7 = 0$]

Esercizio 16. Trovare una retta passante per $A(3, 1, -2)$, sghemba con $r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$ e che sia parallela al piano $\pi : \begin{cases} x = 1 - t + t' \\ y = 3t' \\ z = -t - 2t' \end{cases}$

Esercizio 17. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, classificare la posizione reciproca delle rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + kz \\ y = 0. \end{cases}$$

[le rette sono incidenti in $P(1, 0, 0)$ per ogni valore di k]

Esercizio 18. Al variare di $k, h \in \mathbb{R}$, classificare la posizione reciproca delle rette

$$r : \begin{cases} kx + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} hx + kz = h + k \\ hx + y = h. \end{cases}$$

[Osserviamo preliminarmente che $k \neq 1$, altrimenti r non rappresenta una retta, bensì un piano. Si ha che per $k \neq 1$ e $h \neq 0$ le rette sono sghembe. Per $h = 0$, deve essere $k \neq 0$, altrimenti s non rappresenta una retta. Le rette sono allora incidenti nel punto $P = (0, 0, 1)$.]

Esercizio 19. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per $P(1, 2, 0)$ e contenente la retta $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z - y + 1 = 0. \end{cases}$

[Il piano contente una retta r e un punto P è il piano che contiene il punto P e due punti distinti di r. Si trova $\pi : \ 5x - 4y + 3z + 3 = 0$]

Esercizio 20. Al variare dei parametri reali a e b, classificare la posizione reciproca del piano $\pi : \ ax + y + bz = 1$ e della retta $r : \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay - bz = 1. \end{cases}$

[Per $a \neq 0, \pm 1$ incidenti in $P(\frac{a-b}{a^2+a}, \frac{a+b}{a^2+a}, \frac{a-1}{a(a+1)})$;
per $a = 0$ sono paralleli e disgiunti;
per $a = 1$ la retta giace nel piano;
per $a = -1$ sono paralleli e disgiunti]

Esercizio 21. Al variare del parametro reale k, classificare la posizione reciproca del piano $\pi : kx + y + z = 1$ e della retta $r : \begin{cases} x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1. \end{cases}$

[Affinché r sia una retta deve essere $k \neq 1$.
Per $k \neq 1, -2$ incidenti in $P(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2})$;
per $k = -2$ sono paralleli e disgiunti.]

Esercizio 22. Trovare, se esiste, una retta passante per il punto $P(2, 1, -2)$ ed incidente le rette $r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2. \end{cases}$

Esercizio 23. Al variare di h e k in $\mathbb{R}$, classificare la posizione reciproca dei seguenti piani in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$\pi : \ hx + y + 2z = 1 \qquad\qquad \pi' : \ x + ky + 2z = h.$$

[Per $k = h = 1$ i piani coincidono con $\pi: \; x + y + 2z = 1$;
per $h \neq 1$ o $k \neq 1$ i piani sono incidenti.]

Esercizio 24. Al variare di k in $\mathbb{R}$, classificare la posizione reciproca dei seguenti piani in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$:

$$\pi: \; 3x - y - kz = 1 \qquad\qquad \pi': \; 6x + ky + 4z = k.$$

[Per $k \neq -2$ incidenti;
per $k = -2$ paralleli e distinti.]

Esercizio 25. Rappresentare graficamente il piano di equazione $x - 2y = 0$ e la retta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$.