

**Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica**  
**Geometria - A.A. 2018-2019**  
**Foglio n.12 – Geometria affine dello spazio**

**Esercizio 1.** Stabilire se i seguenti punti  $A, B, C, D$  di  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  sono complanari:

(i)  $A = (0, 0, 0)$      $B = (1, -1, 1)$      $C = (3, 3, 2)$      $D = (-1, -2, 1)$ ;

(ii)  $A = (3, 1, -2)$      $B = (4, -2, 0)$      $C = (5, 2, -6)$      $D = (6, -1, -4)$ ;

(iii)  $A = (1, 0, 0)$      $B = (0, 0, -1)$      $C = (2, 3, -2)$      $D = (2, 3, -3)$ ;

(iv)  $A = (1, -1, 2)$      $B = (2, -2, 3)$      $C = (0, -1, -2)$      $D = (-1, -1, 2)$ ;

(v)  $A = (2, 0, 3)$      $B = (3, 0, 4)$      $C = (3, 1, 4)$      $D = (1, 0, 2)$ .

Per ciascuna quaterna di punti complanari, determinare un piano che li contiene. È unico tale piano?

**Esercizio 2.** Stabilire se i punti  $A, B, C \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$  sono allineati. In caso affermativo, determinare la retta che passa per essi, in caso negativo il piano che li contiene:

(i)  $A = (3, 0, -2)$      $B = (4, -1, -4)$      $C = (2, 1, 0)$ ;

(ii)  $A = (2, 2, 2)$      $B = (1, 1, -1)$      $C = (-1, 2, 3)$ ;

(iii)  $A = (1, 0, 0)$      $B = (1, 0, -\pi)$      $C = (0, 0, 1)$ ;

(iv)  $A = (3, 4, 2)$      $B = (5, -1, 1)$      $C = (2, -3, -2)$ ;

(v)  $A = (-3, 2, 1)$      $B = (-4, 2, 3)$      $C = (-5, 2, -1)$ .

**Esercizio 3.** Determinare, se possibile, per ciascuna delle seguenti terne di punti dello spazio una retta ed un piano che le contiene:

(i)  $A = (4, 2, 0)$      $B = (1, 3, 1)$      $C = (1, 3, 5)$ ;

[complanari non allineati,  $\pi : \begin{cases} x = 4 - 3t + t' \\ y = 2 + t + t' \\ z = t + 5t' \end{cases}$  ]

(ii)  $A = (1, -2, 1)$      $B = (2, -1, 2)$      $C = (1, -1, 2)$ ;

(iii)  $A = (2, 1, 0)$      $B = (2, 0, 3)$      $C = (2, 2, -3)$ ;

(iv)  $A = (1, -2, 1)$      $B = (2, 1, 0)$      $C = (0, -5, 2)$ ;

(v)  $A = (1, -2, 1)$      $B = (2, 0, 3)$      $C = (1, -3, 4)$ .

**Esercizio 4.** Sia  $\{O, e_1, e_2, e_3\}$  un sistema di riferimento affine in  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ . Si dimostri che anche  $\{O, v_1 = 2e_1 + e_2 - e_3, v_2 = -e_1 + 2e_2, v_3 = e_3\}$  è un sistema di riferimento affine in  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ . Determinare le equazioni del cambiamento di coordinate da un sistema di riferimento all'altro.

**Esercizio 5.** Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta parallela a  $v$  e passante per  $A$ , dove:

(i)  $v = (-1, 2, 3)$      $A = (0, -3, -2)$ ;

(ii)  $v = (1, 1, 0)$      $A = (1, 1, 0)$ ;

(iii)  $v = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3})$      $A = (-2, 1, 1)$ .

**Esercizio 6.** Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per i punti  $A$  e  $B$ , dove:

(i)  $A = (-1, -1, 0)$      $B = (-3, 1, 0)$ ;

(ii)  $A = (2, 1, 2)$      $B = (1, 1, -1)$ ;

(iii)  $A = (\frac{3}{2}, \frac{8}{5}, 1)$      $B = (-\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 3)$ .

**Esercizio 7.** Determinare la posizione reciproca delle rette  $r$  ed  $s$ ; se sono incidenti determinare il loro punto di intersezione, se sono complanari, determinare un piano che le contiene:

$$(i) \quad r : \begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ 3x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \quad [\text{sghembe}]$$

$$(ii) \quad r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = -2t + 6 \end{cases} \quad [\text{parallele e distinte, } \pi : 3x - y + 2z - 3 = 0]$$

$$(iii) \quad r : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t + 3 \\ z = t + 4 \end{cases} \quad [\text{sghembe}]$$

$$(iv) \quad r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad [\text{incidenti in } P(1, 1, 2), \pi : x - y + z - 2 = 0]$$

$$(v) \quad r : \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases} \quad [\text{sghembe}]$$

$$(vi) \quad r : 1 - x = y = z - 1 \quad s : \begin{cases} x = 2t \\ y = -2t + 1 \\ z = -2t + 2 \end{cases} \quad [\text{coincidenti}]$$

$$(vii) \quad r : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ y + 3z + 2 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x + 8z + 1 = 0 \\ x + y + 7z - 1 = 0 \end{cases} \quad [\text{sghembe}]$$

**Esercizio 8.** Determinare la posizione reciproca tra la retta  $r$  e il piano  $\pi$ :

$$(i) \quad r : \begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad \pi : 3x + 4y + 2 = 0 \quad [\text{incidenti in } (8, -13/2, 19/2)]$$

$$(ii) \quad r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad \pi : \begin{cases} x = t' + t - 3 \\ y = -t' - 2t \\ z = 2t' - 2t + 6 \end{cases} \quad [\text{incidenti in } P = (-13/2, 15/2, 15)]$$

$$(iii) \quad r : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \end{cases} \quad \pi : \begin{cases} x = t' - t + 3 \\ y = -t' + t + 3 \\ z = 2t' - 3t + 4 \end{cases} \quad [\text{paralleli}]$$

$$(iv) \quad r : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad \pi : \begin{cases} x = 2 - t + 2t' \\ y = -1 + 2t - t' \\ z = -1 + 3t + 2t' \end{cases} \quad [\text{incidenti}]$$

$$(v) \quad r : \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \pi : \begin{cases} x = 1 + 2t - t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = 3t \end{cases} \quad [\text{paralleli}]$$

$$(vi) \quad r : 1 - x = y = z - 1 \quad \pi : \begin{cases} x = 2t - t' - 3 \\ y = t - 2t' + 1 \\ z = 3t + t' \end{cases}$$

$$(vii) \quad r : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ y + 3z + 2 = 0 \end{cases} \quad \pi : 2x - 2y + 2z + 1 = 0$$

**Esercizio 9.** Determinare la posizione reciproca tra i piani  $\pi$  e  $\sigma$ :

(i)  $\pi : x + y + z = 1 \quad \sigma : 3x + 4y + 2 = 0$  [incidenti]

(ii)  $\pi : x - 3y + 2z = 1 \quad \sigma : 2x - 6y + 4z = 5$  [paralleli]

(iii)  $\pi : x - y + z = 8 \quad \sigma : \begin{cases} x = 2t - t' - 3 \\ y = -2t + t' \\ z = 2t' + 6 \end{cases}$  [incidenti]

(iv)  $\pi : \begin{cases} x = t + t' + 2 \\ y = -t - 2t' - 1 \\ z = -3t + t' + 4 \end{cases} \quad \sigma : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t + 3t' + 3 \\ z = t + 4 \end{cases}$  [incidenti]

(v)  $\pi : \begin{cases} x = t + t' + 2 \\ y = -t - 2t' - 1 \\ z = -3t + t' + 4 \end{cases} \quad \sigma : \begin{cases} x = 2t - t' + 3 \\ y = -3t + 2t' - 2 \\ z = -2t - t' + 1 \end{cases}$  [coincidenti]

**Esercizio 10.** Siano dati nello spazio due rette sghembe  $r$  ed  $r'$  ed un punto  $P \notin r \cup r'$ . Dimostrare che esiste una retta  $s$  passante per  $P$  e complanare con  $r$  ed  $r'$ . Dedurre che la relazione di complanarit  non   transitiva nello spazio.

**Esercizio 11.** Dato il punto  $P$  e le rette sghembe  $r$  ed  $r'$ , trovare una retta  $s$  passante per  $P$  e complanare con  $r$  ed  $r'$ :

(i)  $P = (0, 0, 2) \quad r : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$

(ii)  $P = (1, 1, -1) \quad r : \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$

(iii)  $O = (0, 0, 0) \quad r : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad [l'asse z : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} ]$

**Esercizio 12.** Dato il punto  $P$  e le rette sghembe  $r$  ed  $r'$ :

(i)  $P = (-1, 0, 2) \quad r : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$

(ii)  $P = (-1, 1, -1) \quad r : \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad r' : \begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$

(a) trovare, se esiste, un piano  $\alpha$  passante per  $P$  e parallelo ad  $r$  ed  $r'$ ;

(b) trovare, se esiste, un piano passante per  $P$ , contenente  $r$  e parallelo a  $r'$ ;

(c) trovare, se esiste, una retta passante per  $P$  incidente sia  $r$  che  $r'$ .

**Esercizio 13.** Scrivere le equazioni cartesiane e parametriche del piano  $\pi$  passante per i punti

$P = (1, 1, 1)$  e  $Q = (2, 1, 2)$  e parallelo alla retta  $r : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 3t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ .

$[\pi : x + y - z - 1 = 0 \quad \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = t + s - 1 \end{cases} ]$

**Esercizio 14.** Trovare una retta  $r$  passante per il punto  $P = (1, -1, 0)$  e parallela al piano  $\pi : 2x - y + 4 = 0$ .   unica tale retta?

[si trovano tutte le rette del piano  $\pi' : 2x - y = 3$  passanti per  $P$ ]

**Esercizio 15.** Trovare il piano passante per il punto  $P = (1, 1, 5)$  e parallelo al piano  $\pi : x - 3y - z = 1$ .

$$[\pi' : x - 3y - z + 7 = 0]$$

**Esercizio 16.** Trovare una retta passante per  $A(3, 1, -2)$ , sghemba con  $r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$  e che sia

parallela al piano  $\pi : \begin{cases} x = 1 - t + t' \\ y = 3t' \\ z = -t - 2t' \end{cases}$

**Esercizio 17.** Al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , classificare la posizione reciproca delle rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + kz \\ y = 0. \end{cases}$$

[le rette sono incidenti in  $P(1, 0, 0)$  per ogni valore di  $k$ ]

**Esercizio 18.** Al variare di  $k, h \in \mathbb{R}$ , classificare la posizione reciproca delle rette

$$r : \begin{cases} kx + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} hx + kz = h + k \\ hx + y = h. \end{cases}$$

[Osserviamo preliminarmente che  $k \neq 1$ , altrimenti  $r$  non rappresenta una retta, bensì un piano. Si ha che per  $k \neq 1$  e  $h \neq 0$  le rette sono sghembe. Per  $h = 0$ , deve essere  $k \neq 0$ , altrimenti  $s$  non rappresenta una retta. Le rette sono allora incidenti nel punto  $P = (0, 0, 1)$ .]

**Esercizio 19.** Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per  $P(1, 2, 0)$  e contenente la retta  $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z - y + 1 = 0. \end{cases}$

[Il piano contenente una retta  $r$  e un punto  $P$  è il piano che contiene il punto  $P$  e due punti distinti di  $r$ . Si trova  $\pi : 5x - 4y + 3z + 3 = 0$ ]

**Esercizio 20.** Al variare dei parametri reali  $a$  e  $b$ , classificare la posizione reciproca del piano

$\pi : ax + y + bz = 1$  e della retta  $r : \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay - bz = 1. \end{cases}$

[Per  $a \neq 0, \pm 1$  incidenti in  $P(\frac{a-b}{a^2+a}, \frac{a+b}{a^2+a}, \frac{a-1}{a(a+1)})$ ;  
per  $a = 0$  sono paralleli e disgiunti;  
per  $a = 1$  la retta giace nel piano;  
per  $a = -1$  sono paralleli e disgiunti]

**Esercizio 21.** Al variare del parametro reale  $k$ , classificare la posizione reciproca del piano  $\pi :$

$kx + y + z = 1$  e della retta  $r : \begin{cases} x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1. \end{cases}$

[Affinché  $r$  sia una retta deve essere  $k \neq 1$ .  
Per  $k \neq 1, -2$  incidenti in  $P(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2})$ ;  
per  $k = -2$  sono paralleli e disgiunti.]

**Esercizio 22.** Trovare, se esiste, una retta passante per il punto  $P(2, 1, -2)$  ed incidente le rette

$r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$  e  $s : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2. \end{cases}$

**Esercizio 23.** Al variare di  $h$  e  $k$  in  $\mathbb{R}$ , classificare la posizione reciproca dei seguenti piani in  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ :

$$\pi : hx + y + 2z = 1 \quad \pi' : x + ky + 2z = h.$$

[Per  $k = h = 1$  i piani coincidono con  $\pi : x + y + 2z = 1$ ;  
per  $h \neq 1$  o  $k \neq 1$  i piani sono incidenti.]

**Esercizio 24.** Al variare di  $k$  in  $\mathbb{R}$ , classificare la posizione reciproca dei seguenti piani in  $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ :

$$\pi : 3x - y - kz = 1$$

$$\pi' : 6x + ky + 4z = k.$$

[Per  $k \neq -2$  incidenti;  
per  $k = -2$  paralleli e distinti.]

**Esercizio 25.** Rappresentare graficamente il piano di equazione  $x - 2y = 0$  e la retta  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t. \\ z = 3 \end{cases}$