**Sapienza Università di Roma**
**Corso di laurea in Ingegneria Energetica**
**Geometria - A.A. 2015-2016**
**Foglio n.13 – Applicazioni lineari**
**prof. Cigliola**

**Esercizio 1.** Dimostrare che le seguenti applicazioni sono lineari:

(i) $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad F(x,y) = (x+2y, 2x+y, x-y)$;

(ii) $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad F(x,y) = (x-z, x+y-z, x-y)$;

(iii) $F:M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\leqslant 1}[x]$, $\quad F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b)+(c+2d)x.$

**Esercizio 2.** Provare che le seguenti applicazioni non sono lineari:

(i) $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad F(x,y) = \sin x - y$;

(ii) $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad F(x,y) = x^2 y$;

(iii) $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad F(x,y) = 3x - y + 2$;

(iv) $F:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad F(x) = |x|$.

**Esercizio 3.** Siano $V$ e $W$ due spazi vettoriali. Siano poi $F$ e $G$ due applicazioni lineari da $V$ a $W$. Dimostrare che l'applicazione $F+G : V \longrightarrow W$ definita da

$$(F+G)(v) = F(v) + G(v)$$

è un'applicazione lineare da $V$ in $W$.

**Esercizio 4.** Sia data l'applicazione lineare $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x,y) = (x+2y, 3y, x-y).$$

(i) Trovare $F^{-1}(5,6,-1)$.

(ii) Calcolare l'immagine diretta sotto $F$ del sottospazio $U = \mathscr{L}((1,-2))$.

(iii) Stabilire se $F$ è iniettiva o suriettiva.

(iv) Trovare una base e la dimensione dell'immagine e del nucleo di $F$.

**Esercizio 5.** Si consideri l'applicazione $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x,y,z) = (x-y, z).$$

(i) Determinare la controimmagine di $(2,2)$ sotto l'azione di $F$.

(ii) Determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e di $\operatorname{Ker} F$.

(iii) Calcolare la dimensione dell'immagine del sottospazio $U = \mathscr{L}((1,0,0), (0,2,0)$

**Esercizio 6.** Si consideri l'applicazione $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ x-y & z \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la controimmagine della matrice identica $I_2$ sotto l'azione di $F$.

(ii) Determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e di $\operatorname{Ker} F$.

(iii) Stabilire se $F$ è iniettiva o suriettiva.

**Esercizio 7.** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita nel seguente modo:

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se $F$ è iniettiva o suriettiva.

(ii) Calcolare la

**Esercizio 8.** Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(0,1,1) = (1,-1,-1) \qquad F(1,1,-1) = (0,0,2) \qquad F(2,-3,1) = (-1,-1,-2)$$

**Esercizio 9.** Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $F(1,1) = (1,-1,-1)$. È unica tale applicazione?

**Esercizio 10.** Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1,1) = (1,-1,-1) \qquad F(-1,-1) = (-1,1,1) \qquad F(1,0) = (1,0,-3).$$

È unica tale applicazione?

**Esercizio 11.** Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1,1,-1) = (1,-1,-1) \qquad F(1,0,1) = (-1,-2,1) \qquad F(0,1,-2) = (2,1,-2).$$

È unica tale applicazione?

**Esercizio 12.** Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1,0,-1) = (1,-1,-1) \qquad F(1,1,1) = (-1,-2,1) \qquad F(2,1,0) = (1,-1,2).$$

**Esercizio 13.** Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ che abbia come nucleo il sottospazio $U = \mathscr{L}((1,1,0),(-1,1,1))$. È unica tale applicazione?

**Esercizio 14.** Costruire l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ha come nucleo il sottospazio $U = \mathscr{L}((1,1,0),(-1,1,1))$ e tale che $F(0,-1,3) = (2,2,-2)$.

**Esercizio 15.** Sia data l'applicazione $F : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f(0) \\ f(-1) & f(0) \end{pmatrix}$$

(i) Provare che $F$ è lineare.

(ii) Scrivere esplicitamente l'immagine di un generico polinomio $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(iii) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \mathscr{L}(1 + x,\ x^2 - 1)$.

(iv) Provare che la controimmagine della matrice identica $I_2$ sotto $F$ è vuota.

(v) Trovare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e $\operatorname{Ker} F$.

**Esercizio 16.** Sia $F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ l'applicazione tale che

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + (b + d)x + cx^2$$

(i) Provare che $F$ è un'applicazione lineare.

(ii) Determinare $\operatorname{Im} F$ e $\operatorname{Ker} F$, una loro base e le loro dimensioni.

(iii) Stabilire se $F$ è iniettiva o suriettiva.