Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.13 – Applicazioni lineari

Esercizio 1. Dimostrare che le seguenti applicazioni sono lineari:

(i) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad F(x,y) = (x+2y, 2x+y, x-y);$

(ii) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad F(x,y) = (x-z, x+y-z, x-y);$

(iii) $F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 1}[x], \qquad F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b)+(c+2d)x.$

Esercizio 2. Provare che le seguenti applicazioni non sono lineari:

(i) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \sin x - y;$

(ii) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = x^2 y;$

(iii) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = 3x - y + 2;$

(iv) $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad F(x) = |x|.$

Esercizio 3. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x,y) = (x+2y;\ 3y;\ x-y).$$

(i) Trovare $F^{-1}(5,6,-1)$. [$\{(1{,}2)\}$]

(ii) Calcolare l'immagine diretta sotto F del sottospazio $U = \mathcal{L}((1,-2))$. [$\mathcal{L}(1,2,-1)$]

(iii) Stabilire se F è iniettiva o suriettiva. [non suriettiva, iniettiva]

(iv) Trovare una base e la dimensione dell'immagine e del nucleo di F.
[nucleo banale, $\operatorname{Im} F = \mathcal{L}((1,0,1),\ (2,3,-1))$]

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x,y,z) = (x-y,\ z).$$

(i) Determinare la controimmagine di $(2,2)$ sotto l'azione di F. [$\{(2+t, t, 2) | t \in \mathbb{R}\}$]

(ii) Determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e di $\operatorname{Ker} F$.
[$\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Ker} F = \{\ (t,t,0) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$]

(iii) Calcolare la dimensione dell'immagine del sottospazio $U = \mathcal{L}((1,0,0),\ (0,2,0)$ [1]

Esercizio 5. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ x-y & z \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la controimmagine della matrice identica I_2 sotto l'azione di F. [$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$]

(ii) Determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e di $\operatorname{Ker} F$.

(iii) Stabilire se F è iniettiva o suriettiva. [non iniettiva né suriettiva]

Esercizio 6. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita nel seguente modo:

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se F è iniettiva o suriettiva. [non iniettiva, suriettiva]

(ii) Calcolare la controimmagine del vettore $(2,-1)$. [$\{\ (2+t,\ -5, t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$]

(iii) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \mathcal{L}((1,1,-1),\ (1,0,1))$. [$\mathcal{L}(2,5)$]

(iv) Calcolare la matrice associata ad F rispetto alle basi canoniche. [$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$]

(v) Calcolare la matrice di F rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{ (1,1,-1),\ (1,0,-1),\ (1,-1,1) \}$ e $\mathcal{B}' = \{ (1,2),\ (-1,1) \}$. [$\begin{pmatrix} 7/3 & 2 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$]

Esercizio 7. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(0,1,1) = (1,-1,-1) \qquad F(1,1,-1) = (0,0,2) \qquad F(2,-3,1) = (-1,-1,-2)$$

[$F(x,y,z) = \left(\frac{y}{2} + \frac{z}{2},\ -\frac{x}{2} - \frac{y}{4} - \frac{3}{4}z,\ \frac{x}{4} + \frac{3}{8}y - \frac{11}{8}z\right)$]

Esercizio 8. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $F(1,1) = (1,-1,-1)$. È unica tale applicazione? In caso negativo esibirne almeno due distinte.
[Una tale applicazione esiste e non è unica. Per trovarne due distinte basta completare il vettore in partenza ad una base di $\mathbb{R}^2$ e scegliere a piacere una sua immagine. Si ottengono ad esempio $F(x,y) = (y,-y,-y)$ e $F_1(x,y) = (x,-x,-x)$.]

Esercizio 9. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1,1) = (1,-1,-1) \qquad F(-1,-1) = (-1,1,1) \qquad F(1,0) = (1,0,-3).$$

È unica tale applicazione?
[Si ottiene la sola applicazione lineare $F(x,y) = (x,\ -y,\ -3x+2y)$]

Esercizio 10. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1,1,-1) = (1,-1,-1) \qquad F(1,0,1) = (-1,-2,1) \qquad F(0,1,-2) = (2,1,-2).$$

È unica tale applicazione?
[Una tale applicazione esiste ma non è unica. Infatti la terza condizione è superflua poiché il terzo vettore scelto in partenza è la differenza dei primi due. Corrispondentemente, l'immagine del terzo vettore è la differenza delle immagini dei primi due. Essendo però le due informazioni rimanenti insufficienti, ci sono infinite applicazioni che verificano tali proprietà.]

Esercizio 11. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1,0,-1) = (1,-1,-1) \qquad F(1,1,1) = (-1,-2,1) \qquad F(2,1,0) = (1,-1,2).$$

[Una tale applicazione lineare non può esistere poiché trasformerebbe vettori dipendenti in vettori indipendenti.]

Esercizio 12. Trovare l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$F(x^2-1) = (1,-1,0,0) \qquad F(x+1) = (1,2,0,1) \qquad F(x^2+x+1) = (0,-1,1,0).$$

Studiare poi la suriettività e l'iniettività di F.
[Si osservi che una tale F non può essere suriettiva ed è necessariamente iniettiva.]

Esercizio 13. Trovare un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x-1) = (1,2,0) \qquad F(x^2+1) = (1,2,0).$$

Studiare poi la suriettività e l'iniettività di F.
[Si ponga anche per semplicità $F(1) = (1,2,0)$. Allora una possibile applicazione lineare è $F(ax^2+bx+c) = (2b+c,\ 4b+c,\ 0)$. Si osservi che una qualsiasi altra F non è iniettiva né, necessariamente, suriettiva.]

Esercizio 14. Stabilire se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(2x^2 - 1) = (1, -1, 0, 0) \qquad F(x - 1) = (1, 2, 0, 1) \qquad F(2x^2 + x - 1) = (0, -1, 1, 0).$$

[sì ed è unica]

Esercizio 15. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ che abbia come nucleo il sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 1, 0), (-1, 1, 1))$. È unica tale applicazione?

[Deve essere $F(1, 1, 0) = F(-1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Poiché manca un vettore per completare ad una base dello spazio di partenza, le applicazioni lineari possibili sono infinite. Si badi a non far sì che anche il terzo vettore della base di partenza vada a finire nel vettore nullo, altrimenti si ottiene l'applicazione nulla che ha nucleo di dimensione tre.]

Esercizio 16. Costruire l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ha come nucleo il sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 1, 0), (-1, 1, 1))$ e tale che $F(0, -1, 3) = (2, 2, -2)$.

Esercizio 17. Sia data l'applicazione $F : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f(0) \\ f(-1) & f(0) \end{pmatrix}$$

(i) Provare che F è lineare.

(ii) Scrivere esplicitamente l'immagine di un generico polinomio $f(x) = ax^2 + bx + c$.

[$F(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a + b + c & c \\ a - b + c & c \end{pmatrix}$]

(iii) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \mathcal{L}(1 + x,\ x^2 - 1)$. [$\mathcal{L}(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$]

(iv) Provare che la controimmagine della matrice identica I_2 sotto F è vuota.

(v) Trovare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e $\operatorname{Ker} F$.

[Il nucleo è banale. L'immagine è $\operatorname{Im} F = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$]

Esercizio 18. Sia $F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ l'applicazione tale che

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + (b + d)x + cx^2$$

(i) Provare che F è un'applicazione lineare.

(ii) Determinare $\operatorname{Im} F$ e $\operatorname{Ker} F$, una loro base e le loro dimensioni.

[$\operatorname{Ker} F = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$, $\operatorname{Im} F = \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$]

(iii) Stabilire se F è iniettiva o suriettiva. [suriettiva, non iniettiva]

(iv) Scrivere la matrice associata ad F rispetto alle basi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $M_2(\mathbb{R})$ e $\left\{ x^2 - 1, x + 1, 2 - x \right\}$ di $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$.

[$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$]

Esercizio 19. Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche alle seguenti applicazioni lineari:

(i) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\qquad F(x, y) = (x + 2y, 2x + y, x - y)$; [$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$]

(ii) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad F(x,y,z) = (x-z, x+y-z, x-y)$; $\quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$

(iii) $F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\leqslant 1}[x]$, $\quad F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b) + (c+2d)x$. $\quad \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right]$

Esercizio 20. Siano V e W due spazi vettoriali. Siano poi F e G due applicazioni lineari da V a W. Dimostrare che l'applicazione $F+G : V \longrightarrow W$ definita da

$$(F+G)(v) = F(v) + G(v)$$

è un'applicazione lineare da V in W. Fissate due basi, una di V e una di W, e dette A e B rispettivamente le matrici di F e G associate a tali basi, come si può calcolare la matrice di $F+G$?

Esercizio 21. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x,y) = (x-2y,\ 3y,\ x+y).$$

(i) Trovare $F^{-1}(0,1,-1)$. $\quad [\varnothing]$

(ii) Trovare la matrice associata ad F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$. $\quad \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

(iii) Trovare la matrice associata ad F rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{\,(1,0),(-1,-1)\,\}$ di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = \{\,(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\,\}$ di $\mathbb{R}^3$. $\quad \left[\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}\right]$

(iv) Stabilire se F è iniettiva, suriettiva, invertibile. $\quad$ [solo iniettiva]

(v) Trovare una base dell'immagine e del nucleo di F.

[il nucleo è banale, $\operatorname{Im} F = \mathcal{L}((1,0,1),(-2,3,1))$]

Esercizio 22. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x,y,z) = (x+2y;\ -\sqrt{3}z).$$

(i) Determinare la controimmagine di $(2,2)$ sotto l'azione di F.

(ii) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{\,(1,1),(-1,1)\,\}$ di $\mathbb{R}^2$.

(iii) Determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e di $\operatorname{Ker} F$.

Esercizio 23. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y & x+y \\ 2x+y & z-x \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la controimmagine della matrice identica I_2 sotto l'azione di F. $\quad [\varnothing]$

(ii) Determinare la matrice associata ad F rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $M_2(\mathbb{R})$.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

(iii) Determinare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e di $\operatorname{Ker} F$.

[il nucleo è banale, $\operatorname{Im} F = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$]

(iv) Stabilire se F è iniettiva o suriettiva. $\quad$ [iniettiva, non suriettiva]

Esercizio 24. Trovare, se esiste, un omomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $F^{-1}(0,1,1) = (1,-1,-1)$, il vettore $(1,1,-1)$ sia trasformato in sé stesso e il vettore $(-1,2,1)$ stia nel nucleo.

[Deve essere $F(1,-1,-1) = (0,1,1)$, $F(1,1,-1) = (1,1,-1)$ e $F(-1,2,1) = (0,0,0)$. Si applichi il teorema di estensione. Si trova che una tale F non esiste poiché sia in partenza che in arrivo i vettori sono linearmente dipendenti, ma in arrivo il terzo vettore è quello nullo, in partenza no; pertanto F non rispetta una combinazione lineare.]

Esercizio 25. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ che trasforma i vettori $(1,-1,-1,0)$ e $(0,0,0,1)$ in sé stessi e che trasforma i vettori $(1,0,0,-1)$ e $(0,1,-1,0)$ nei loro opposti.

[$F(x,y,z,t) = (-x-y-z,\ z,\ y,\ 2x+y+z+t)$]

Esercizio 26. Determinare la matrice associata rispetto alla base canonica dell'endomorfismo F di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che

- $F^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I_2$,
- la restrizione di F al sottospazio $ASym_2(\mathbb{R})$ (delle matrici antisimmetriche di ordine 2) si comporta come l'identità su $ASym_2(\mathbb{R})$,
- la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ viene mandata nel suo opposto,
- la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è nel nucleo di F.

[Passando alle coordinate rispetto alla base canonica, deve essere: $F(1,0,0,1) = (1,1,1,1)$, $F(0,1,-1,0) = (0,1,-1,0)$, $F(1,1,0,0) = (-1,-1,0,0)$ e $F(1,0,-1,0) = (0,0,0,0)$. Si trova così $F\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}t & -x-z+2t \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t & t \end{pmatrix}$]

Esercizio 27. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ha per matrice associata rispetto alla base canonica la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \mathcal{L}((1,0,1,0),(1,-1,0,0))$.

(ii) Scrivere esplicitamente le equazioni di F (rispetto alle basi canoniche).

[$F(x,y,z,t) = (x+y,\ y+t,\ x+2y+t)$]

(iii) Determinare $F^{-1}(1,0,0)$.

(iv) Trovare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e $\operatorname{Ker} F$.

Esercizio 28. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che ha per matrice associata rispetto alla base canonica la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix})$.

(ii) Scrivere esplicitamente le equazioni di F (rispetto alle basi canoniche).

(iii) Determinare $F^{-1}(1,-1,0)$.

(iv) Trovare una base e la dimensione di $\operatorname{Im} F$ e $\operatorname{Ker} F$.

Esercizio 29. Siano V uno spazio vettoriale ed $F : V \longrightarrow V$ un isomorfismo. Siano U e W due sottospazi di V tali che $U \oplus W = V$. Provare che anche $F(U) \oplus F(W) = V$.

Esercizio 30. Siano dati due spazi vettoriali V e W con basi rispettivamente $\mathcal{B}_V = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ e $\mathcal{B}'_W = \{ w_1, w_2, w_3 \}$. Sia data l'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$ tale che

$$F(v_1 + v_3) = w_1 + w_2 \qquad F(v_2) = w_3 \qquad F(v_2 - v_3) = w_1 - w_2 + w_3.$$

(i) Dimostrare che F è un isomorfismo.

[Dalle condizioni note si ricava che $F(v_3) = F(v_2) - F(v_2 - v_3) = -w_1 + w_2$ e che $F(v_1) = F(v_1 + v_3) - F(v_3) = w_1 + w_2 + w_1 - w_2 = 2w_1$. Pertanto la matrice associata ad F rispetto alle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}'_W$ è $M_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}'_W}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Essendo questa invertibile, F è un isomorfismo.]

(ii) Determinare la matrice di F rispetto alle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}'_W$.

(iii) Trovare una base di $\operatorname{Im} F$ e di $\operatorname{Ker} F$. [Il nucleo è banale, l'immagine è W.]

(iv) Dato il sottospazio U di V generato dai vettori $v'_1 = v_1 - v_2$ e $v'_2 = v_1 + v_2$, trovare equazioni parametriche del sottospazio $F(U)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'_W$.

(v) Determinare la matrice A' associata ad F rispetto alle basi $\overline{\mathcal{B}}_V = \{v_2,\ v_2 - v_3,\ v_1 - v_3\}$ e $\mathcal{B}'_W$.

[Resta da calcolare $F(v_1 - v_3) = 2w_1 + w_1 - w_2 = 3w_1 - w_2$. La matrice cercata è allora $M_{\overline{\mathcal{B}}_V, \mathcal{B}'_W}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$]

Esercizio 31. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\{ v_1,\ v_2,\ v_3 \}$. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, si consideri l'applicazione lineare data dalle condizioni:

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1 + 2v_2 - v_3 \\ f(v_2) = -v_1 + 2v_2 \\ f(v_3) = 3v_1 + hv_2 + (h+1)v_3 \end{cases}$$

(i) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base data. [$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & h \\ -1 & 0 & h+1 \end{pmatrix}$]

(ii) Trovare l'espressione dell'immagine di un generico elemento di V.

[Preso $v = xv_1 + yv_2 + zv_3$, la sua immagine è $F(v) = (x - y - z)v_1 + (2x + 2y)v_2 + (-x + hy + (h+1)z)v_3$.]

(iii) Per quali valori di h F è un automorfismo? [$h \neq -3$]

(iv) Per $h = -2$, trovare una base di nucleo e immagine di F.

(v) Quando possibile, trovare la matrice associata a F^{-1} rispetto alla base data.