

Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2018-2019
Foglio n.13 – Applicazioni lineari

Esercizio 1. Dimostrare che le seguenti applicazioni sono lineari:

(i) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y) = (x + 2y, 2x + y, x - y);$

(ii) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y) = (x - z, x + y - z, x - y);$

(iii) $F : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 1}[x], \quad F \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b) + (c + 2d)x.$

Esercizio 2. Provare che le seguenti applicazioni non sono lineari:

(i) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = \sin x - y;$

(ii) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = x^2y;$

(iii) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = 3x - y + 2;$

(iv) $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x) = |x|.$

Esercizio 3. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x, y) = (x + 2y, 3y, x - y).$$

(i) Trovare $F^{-1}(5, 6, -1).$ [$\{(1, 2)\}$]

(ii) Calcolare l'immagine diretta sotto F del sottospazio $U = \mathcal{L}((1, -2)).$ [$\mathcal{L}(1, 2, -1)$]

(iii) Stabilire se F è iniettiva o suriettiva. [non suriettiva, iniettiva]

(iv) Trovare una base e la dimensione dell'immagine e del nucleo di $F.$
[nucleo banale, $\text{Im } F = \mathcal{L}((1, 0, 1), (2, 3, -1))$]

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x, y, z) = (x - y, z).$$

(i) Determinare la controimmagine di $(2, 2)$ sotto l'azione di $F.$ [$\{(2 + t, t, 2) | t \in \mathbb{R}\}$]

(ii) Determinare una base e la dimensione di $\text{Im } F$ e di $\text{Ker } F.$
[$\text{Im } F = \mathbb{R}^2, \text{Ker } F = \{(t, t, 0) | t \in \mathbb{R}\}$]

(iii) Calcolare la dimensione dell'immagine del sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 2, 0))$ [1]

Esercizio 5. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y & x - y \\ x - y & z \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la controimmagine della matrice identica I_2 sotto l'azione di $F.$ [$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$]

(ii) Determinare una base e la dimensione di $\text{Im } F$ e di $\text{Ker } F.$

(iii) Stabilire se F è iniettiva o suriettiva. [non iniettiva né suriettiva]

Esercizio 6. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita nel seguente modo:

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se F è iniettiva o suriettiva. [non iniettiva, suriettiva]

(ii) Calcolare la controimmagine del vettore $(2, -1).$ [$\{(2 + t, -5, t) | t \in \mathbb{R}\}$]

(iii) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 1, -1), (1, 0, 1))$. [$\mathcal{L}(2, 5)$]

(iv) Calcolare la matrice associata ad F rispetto alle basi canoniche. [$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$]

(v) Calcolare la matrice di F rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{(1, 1, -1), (1, 0, -1), (1, -1, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 2), (-1, 1)\}$. [$\begin{pmatrix} 7/3 & 2 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$]

Esercizio 7. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(0, 1, 1) = (1, -1, -1) \quad F(1, 1, -1) = (0, 0, 2) \quad F(2, -3, 1) = (-1, -1, -2)$$

$$[F(x, y, z) = (\frac{y}{2} + \frac{z}{2}, -\frac{x}{2} - \frac{y}{4} - \frac{3}{4}z, \frac{x}{4} + \frac{3}{8}y - \frac{11}{8}z)]$$

Esercizio 8. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $F(1, 1) = (1, -1, -1)$. È unica tale applicazione? In caso negativo esibirne almeno due distinte.

[Una tale applicazione esiste e non è unica. Per trovarne due distinte basta completare il vettore in partenza ad una base di \mathbb{R}^2 e scegliere a piacere una sua immagine. Si ottengono ad esempio $F(x, y) = (y, -y, -y)$ e $F_1(x, y) = (x, -x, -x)$.]

Esercizio 9. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1, 1) = (1, -1, -1) \quad F(-1, -1) = (-1, 1, 1) \quad F(1, 0) = (1, 0, -3).$$

È unica tale applicazione?

[Si ottiene la sola applicazione lineare $F(x, y) = (x, -y, -3x + 2y)$]

Esercizio 10. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1, 1, -1) = (1, -1, -1) \quad F(1, 0, 1) = (-1, -2, 1) \quad F(0, 1, -2) = (2, 1, -2).$$

È unica tale applicazione?

[Una tale applicazione esiste ma non è unica. Infatti la terza condizione è superflua poiché il terzo vettore scelto in partenza è la differenza dei primi due. Corrispondentemente, l'immagine del terzo vettore è la differenza delle immagini dei primi due. Essendo però le due informazioni rimanenti insufficienti, ci sono infinite applicazioni che verificano tali proprietà.]

Esercizio 11. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1, 0, -1) = (1, -1, -1) \quad F(1, 1, 1) = (-1, -2, 1) \quad F(2, 1, 0) = (1, -1, 2).$$

[Una tale applicazione lineare non può esistere poiché trasformerebbe vettori dipendenti in vettori indipendenti.]

Esercizio 12. Trovare l'applicazione lineare $F: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che

$$F(x^2 - 1) = (1, -1, 0, 0) \quad F(x + 1) = (1, 2, 0, 1) \quad F(x^2 + x + 1) = (0, -1, 1, 0).$$

Studiare poi la suriettività e l'iniettività di F .

[Si osservi che una tale F non può essere suriettiva ed è necessariamente iniettiva.]

Esercizio 13. Trovare un'applicazione lineare $F: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x - 1) = (1, 2, 0) \quad F(x^2 + 1) = (1, 2, 0).$$

Studiare poi la suriettività e l'iniettività di F .

[Si ponga anche per semplicità $F(1) = (1, 2, 0)$. Allora una possibile applicazione lineare è $F(ax^2 + bx + c) = (2b + c, 4b + c, 0)$. Si osservi che una qualsiasi altra F non è iniettiva né, necessariamente, suriettiva.]

Esercizio 14. Stabilire se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(2x^2 - 1) = (1, -1, 0, 0) \quad F(x - 1) = (1, 2, 0, 1) \quad F(2x^2 + x - 1) = (0, -1, 1, 0).$$

[sì ed è unica]

Esercizio 15. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che abbia come nucleo il sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 1, 0), (-1, 1, 1))$. È unica tale applicazione?

[Deve essere $F(1, 1, 0) = F(-1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Poiché manca un vettore per completare ad una base dello spazio di partenza, le applicazioni lineari possibili sono infinite. Si badi a non far sì che anche il terzo vettore della base di partenza vada a finire nel vettore nullo, altrimenti si ottiene l'applicazione nulla che ha nucleo di dimensione tre.]

Esercizio 16. Costruire l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che ha come nucleo il sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 1, 0), (-1, 1, 1))$ e tale che $F(0, -1, 3) = (2, 2, -2)$.

Esercizio 17. Sia data l'applicazione $F : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(f(x)) = \begin{pmatrix} f(1) & f(0) \\ f(-1) & f(0) \end{pmatrix}$$

(i) Provare che F è lineare.

(ii) Scrivere esplicitamente l'immagine di un generico polinomio $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$[F(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a+b+c & c \\ a-b+c & c \end{pmatrix}]$$

(iii) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \mathcal{L}(1+x, x^2-1)$. $[\mathcal{L}(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})]$

(iv) Provare che la controimmagine della matrice identica I_2 sotto F è vuota.

(v) Trovare una base e la dimensione di $\text{Im } F$ e $\text{Ker } F$.

$$[\text{Il nucleo è banale. L'immagine è } \text{Im } F = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})]$$

Esercizio 18. Sia $F : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ l'applicazione tale che

$$F \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + (b+d)x + cx^2$$

(i) Provare che F è un'applicazione lineare.

(ii) Determinare $\text{Im } F$ e $\text{Ker } F$, una loro base e le loro dimensioni.

$$[\text{Ker } F = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}), \text{Im } F = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]]$$

(iii) Stabilire se F è iniettiva o suriettiva.

[suriettiva, non iniettiva]

(iv) Scrivere la matrice associata ad F rispetto alle basi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ di

$$M_2(\mathbb{R}) \text{ e } \{x^2 - 1, x + 1, 2 - x\} \text{ di } \mathbb{R}_{\leq 2}[x]. \quad \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right]$$

Esercizio 19. Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche alle seguenti applicazioni lineari:

$$(i) F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x, y) = (x + 2y, 2x + y, x - y); \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

(ii) $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (x - z, x + y - z, x - y)$; $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$

(iii) $F: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{<1}[x]$, $F \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b) + (c + 2d)x$. $\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$

Esercizio 20. Siano V e W due spazi vettoriali. Siano poi F e G due applicazioni lineari da V a W . Dimostrare che l'applicazione $F + G: V \rightarrow W$ definita da

$$(F + G)(v) = F(v) + G(v)$$

è un'applicazione lineare da V in W . Fissate due basi, una di V e una di W , e dette A e B rispettivamente le matrici di F e G associate a tali basi, come si può calcolare la matrice di $F + G$?

Esercizio 21. Sia data l'applicazione lineare $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x, y) = (x - 2y, 3y, x + y).$$

(i) Trovare $F^{-1}(0, 1, -1)$. $[\emptyset]$

(ii) Trovare la matrice associata ad F rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^2 e di \mathbb{R}^3 . $\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$

(iii) Trovare la matrice associata ad F rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{(1, 0), (-1, -1)\}$ di \mathbb{R}^2 e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ di \mathbb{R}^3 . $\left[\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \right]$

(iv) Stabilire se F è iniettiva, suriettiva, invertibile. $[\text{solo iniettiva}]$

(v) Trovare una base dell'immagine e del nucleo di F . $[\text{il nucleo è banale, Im } F = \mathcal{L}((1, 0, 1), (-2, 3, 1))]$

Esercizio 22. Si consideri l'applicazione $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x, y, z) = (x + 2y, -\sqrt{3}z).$$

(i) Determinare la controimmagine di $(2, 2)$ sotto l'azione di F .

(ii) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 e alla base $\{(1, 1), (-1, 1)\}$ di \mathbb{R}^2 .

(iii) Determinare una base e la dimensione di $\text{Im } F$ e di $\text{Ker } F$.

Esercizio 23. Si consideri l'applicazione $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y & x + y \\ 2x + y & z - x \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la controimmagine della matrice identica I_2 sotto l'azione di F . $[\emptyset]$

(ii) Determinare la matrice associata ad F rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e di $M_2(\mathbb{R})$.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

(iii) Determinare una base e la dimensione di $\text{Im } F$ e di $\text{Ker } F$.

$$[\text{il nucleo è banale, Im } F = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)]$$

(iv) Stabilire se F è iniettiva o suriettiva. $[\text{iniettiva, non suriettiva}]$

Esercizio 24. Trovare, se esiste, un omomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $F^{-1}(0, 1, 1) = (1, -1, -1)$, il vettore $(1, 1, -1)$ sia trasformato in sé stesso e il vettore $(-1, 2, 1)$ stia nel nucleo.

[Deve essere $F(1, -1, -1) = (0, 1, 1)$, $F(1, 1, -1) = (1, 1, -1)$ e $F(-1, 2, 1) = (0, 0, 0)$. Si applichi il teorema di estensione. Si trova che una tale F non esiste poiché sia in partenza che in arrivo i vettori sono linearmente dipendenti, ma in arrivo il terzo vettore è quello nullo, in partenza no; pertanto F non rispetta una combinazione lineare.]

Esercizio 25. Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che trasforma i vettori $(1, -1, -1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ in sé stessi e che trasforma i vettori $(1, 0, 0, -1)$ e $(0, 1, -1, 0)$ nei loro opposti.

$$[F(x, y, z, t) = (-x - y - z, z, y, 2x + y + z + t)]$$

Esercizio 26. Determinare la matrice associata rispetto alla base canonica dell'endomorfismo F di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che

- $F^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = I_2$,
- la restrizione di F al sottospazio $ASym_2(\mathbb{R})$ (delle matrici antisimmetriche di ordine 2) si comporta come l'identità su $ASym_2(\mathbb{R})$,
- la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ viene mandata nel suo opposto,
- la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è nel nucleo di F .

[Passando alle coordinate rispetto alla base canonica, deve essere: $F(1, 0, 0, 1) = (1, 1, 1, 1)$, $F(0, 1, -1, 0) = (0, 1, -1, 0)$, $F(1, 1, 0, 0) = (-1, -1, 0, 0)$ e $F(1, 0, -1, 0) = (0, 0, 0, 0)$. Si trova così $F \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}t & -x - z + 2t \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t & t \end{pmatrix}$]

Esercizio 27. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che ha per matrice associata rispetto alla base canonica la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (i) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 0))$.
- (ii) Scrivere esplicitamente le equazioni di F (rispetto alle basi canoniche).

$$[F(x, y, z, t) = (x + y, y + t, x + 2y + t)]$$

(iii) Determinare $F^{-1}(1, 0, 0)$.

(iv) Trovare una base e la dimensione di $\text{Im } F$ e $\text{Ker } F$.

Esercizio 28. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ che ha per matrice associata rispetto alla base canonica la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

- (i) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
- (ii) Scrivere esplicitamente le equazioni di F (rispetto alle basi canoniche).
- (iii) Determinare $F^{-1}(1, -1, 0)$.
- (iv) Trovare una base e la dimensione di $\text{Im } F$ e $\text{Ker } F$.

Esercizio 29. Siano V uno spazio vettoriale ed $F : V \rightarrow V$ un isomorfismo. Siano U e W due sottospazi di V tali che $U \oplus W = V$. Provare che anche $F(U) \oplus F(W) = V$.

Esercizio 30. Siano dati due spazi vettoriali V e W con basi rispettivamente $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{B}'_W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Sia data l'applicazione lineare $F: V \rightarrow W$ tale che

$$F(v_1 + v_3) = w_1 + w_2 \quad F(v_2) = w_3 \quad F(v_2 - v_3) = w_1 - w_2 + w_3.$$

(i) Dimostrare che F è un isomorfismo.

[Dalle condizioni note si ricava che $F(v_3) = F(v_2) - F(v_2 - v_3) = -w_1 + w_2$ e che $F(v_1) = F(v_1 + v_3) - F(v_3) = w_1 + w_2 + w_1 - w_2 = 2w_1$. Pertanto la matrice associata ad F rispetto alle basi \mathcal{B}_V e \mathcal{B}'_W è $M_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}'_W}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Essendo questa invertibile, F è un isomorfismo.]

(ii) Determinare la matrice di F rispetto alle basi \mathcal{B}_V e \mathcal{B}'_W .

(iii) Trovare una base di $\text{Im } F$ e di $\text{Ker } F$. [Il nucleo è banale, l'immagine è W .]

(iv) Dato il sottospazio U di V generato dai vettori $v'_1 = v_1 - v_2$ e $v'_2 = v_1 + v_2$, trovare equazioni parametriche del sottospazio $F(U)$ rispetto alla base \mathcal{B}'_W .

(v) Determinare la matrice A' associata ad F rispetto alle basi $\overline{\mathcal{B}}_V = \{v_2, v_2 - v_3, v_1 - v_3\}$ e \mathcal{B}'_W .

[Resta da calcolare $F(v_1 - v_3) = 2w_1 + w_1 - w_2 = 3w_1 - w_2$. La matrice cercata è allora

$$M_{\overline{\mathcal{B}}_V, \mathcal{B}'_W}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 31. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, si consideri l'applicazione lineare data dalle condizioni:

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1 + 2v_2 - v_3 \\ f(v_2) = -v_1 + 2v_2 \\ f(v_3) = 3v_1 + hv_2 + (h+1)v_3 \end{cases}$$

(i) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base data. [$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & h \\ -1 & 0 & h+1 \end{pmatrix}$]

(ii) Trovare l'espressione dell'immagine di un generico elemento di V .

[Preso $v = xv_1 + yv_2 + zv_3$, la sua immagine è $F(v) = (x - y - z)v_1 + (2x + 2y)v_2 + (-x + hy + (h+1)z)v_3$.]

(iii) Per quali valori di h F è un automorfismo? [$h \neq -3$]

(iv) Per $h = -2$, trovare una base di nucleo e immagine di F .

(v) Quando possibile, trovare la matrice associata a F^{-1} rispetto alla base data.