Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.13 – Funzioni di più variabili, campi vettoriali

Esercizio 1. Verificare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,1,-1)} (x^2 + 2y^2 - z) = 4$$

Esercizio 2. Spiegare perché la seguente funzione non è continua:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 - y + z & \text{per } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 1 & \text{per } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Esercizio 3. Dire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono aperti, chiusi, limitati, compatti, connessi:

(i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-2)^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\}$;

(ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xyz \neq 0\}$

(iii) $(-2,-1] \times [-1,0) \times \{-1\} \quad \cup \quad \{1\} \times [0,1] \times (1,2)$

(iv) $\mathbb{N} \times (-1,1) \times (0,1]$

(v) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(vi) $\{1\} \times [0,1] \times \mathbb{Z}$

(vii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -1 \leqslant x \leqslant 1,\ y \neq 1,\ 1 \leqslant z \leqslant 2\}$

Esercizio 4. Trovare l'insieme dei punti interni, esterni, isolati, di accumulazione, di frontiera degli insiemi dell'esercizio precedente.

Esercizio 5. Determinare e rappresentare graficamente il dominio delle seguenti funzioni di tre variabili reali:

(i) $f(x,y,z) = \sqrt{z - x^2 - y^2} + 8\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z}$;

(ii) $f(x,y,z) = \log z - \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} - y^2$;

$[\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z > 0\}]$

(iii) $f(x,y,z) = \frac{1}{x} - \frac{2014}{y} + \frac{1}{z}$;

(iv) $f(x,y,z) = \arccos(x^2 + 4y^2 + z^2 - 3)$;

(v) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + 5\log\left(4 - x^2 - y^2 - z^2\right)$.

Esercizio 6. Si calcolino gradiente e matrice hessiana delle seguenti funzioni:

(i) $f(x,y,z) = x^2 y^z$

(ii) $f(x,y,z) = e^z xy + x^5 y^7 + \log(xz)$

(iii) $f(x,y,z) = y^2 \sin(yz) - x \cos y^2$

(iv) $f(x,y,z) = \frac{z^2}{\arctan x + \arctan y + \arctan z}$

Esercizio 7. Determinare e classificare i punti stazionari delle seguenti funzioni di più variabili reali:

(i) $f(x,y,z) = x^3 - y^3 - 2xyz + 2z^2$ [sella in $(3,-3,-\frac{9}{2})$]

(ii) $f(x,y,z) = z^3 - y^3 + xy + z^2$ [selle in $(0,0,-\frac{2}{3})$ e $(0,0,0)$]

(iii) $f(x,y,z) = \arctan(x^2 + y^2 - z^2)$ [sella nell'origine]

(iv) $f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 2x + 2y + 1$ [minimo in $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$]

(v) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xyz$

[selle in $(\pm 2, \pm 2, \pm 1)$, con tutte le combinazioni di segno, minimo nell'origine]

Esercizio 8. Calcolare il polinomio di Taylor arrestato al secondo ordine delle funzione $f(x,y,z) = xy - z^2 + \sin(xy) - 3$ di punto iniziale $(0,0,0)$.

Esercizio 9. Calcolare la matrice jacobiana delle seguenti funzioni:

(i) $f(x,y) = x^2 y$

(ii) $f(x) = (x^2,\ x-1,\ \sin x)$

(iii) $f(x,y,z) = (x^2yz,\ x-y+2z^3,\ \sin x + \sin z - \cos^2 y)$

(iv) $f(x,y,z) = (2x^3 - yz,\ 2xyz,\ -3e^y + 2z)$