

**Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Energetica**  
**Geometria - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola**  
**Foglio n.14 – Diagonalizzazione di endomorfismi**

**Esercizio 1.** Sia data l'applicazione  $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$F(x, y) = (x - y, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (i) Verificare che  $F$  è lineare.
- (ii) Stabilire se  $F$  è un automorfismo. [sì]
- (iii) Determinare la matrice associata ad  $F$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^2$  e rispetto alla base  $\mathcal{B} = \{ (1, 2), (-1, -1) \}$ . [  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$  ]
- (iv) Dato il vettore  $v = (-1, 3)$ , calcolare l'immagine diretta del sottospazio  $\mathcal{L}(v)$  e la controimmagine del vettore  $v$  sotto l'azione di  $F$ . [  $F(\mathcal{L}(v)) = \mathcal{L}(-4, 3)$ ,  $F^{-1}(v) = (2, 3)$  ]
- (v) Determinare tutti gli autovettori di  $F$  e stabilire se  $F$  è diagonalizzabile. [non diagonalizzabile, non ci sono autovettori]

**Esercizio 2.** Sia data l'applicazione lineare  $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$F(x, y) = (x + y, x + y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (i) Stabilire se  $F$  è un automorfismo. [no]
- (ii) Determinare tutti gli autovettori di  $F$  e stabilire se  $F$  è diagonalizzabile. [  $E(0) = \mathcal{L}(1, -1)$ ,  $E(2) = \mathcal{L}(1, 1)$ , diagonalizzabile ]

**Esercizio 3.** Sia data l'applicazione lineare  $F : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$  tale che

$$F(1) = x^2 \quad F(x) = -1 + x + x^2 \quad F(x^2) = x^2.$$

- (i) Stabilire se  $F$  è un automorfismo. [no]
- (ii) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di  $F$ . [  $\text{Ker } F = \mathcal{L}(x^2 - 1)$ ,  $\text{Im } F = \mathcal{L}(x^2, x^2 + x - 1)$  ]
- (iii) Determinare autovalori ed autospazi di  $F$ . [  $E(0) = \text{Ker } F$ ,  $E(1) = \mathcal{L}(x - 1, x^2)$  ]
- (iv) Stabilire se  $F$  è diagonalizzabile. [sì]

**Esercizio 4.** Sia data l'applicazione  $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$F(x, y, z) = (x - y + z, 2y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- (i) Determinare  $\text{Ker}(F)$  e  $\text{Im}(F)$ . [  $\text{Im } F = \mathbb{R}^3$ ,  $\text{Ker } F = \{ (0, 0, 0) \}$  ]
- (ii) Dato il vettore  $v = (-1, 0, 1)$ , calcolare l'immagine diretta del sottospazio  $\mathcal{L}(v)$  e la controimmagine del vettore  $v$  sotto l'azione di  $F$ . [  $F(\mathcal{L}(v)) = \mathcal{L}(0, 0, 1)$ ,  $F^{-1}(v) = \{ (-2, 0, 1) \}$  ]
- (iii) Stabilire se  $F$  è diagonalizzabile. [no]

**Esercizio 5.** Sia data l'applicazione  $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tale che

$$F(x, y, z) = (2y, kx - y + kz, 2y), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

dove  $k$  è un parametro reale.

- (i) Determinare al variare di  $k$  una base di  $\text{Ker}(F)$  e  $\text{Im}(F)$ . [ per  $k \neq 0$ ,  $\text{Ker } F = \mathcal{L}(1, 0, -1)$  e  $\text{Im } F = \mathcal{L}((k, -1, k), (0, 1, 0))$   
per  $k = 0$ ,  $\text{Ker } F = \mathcal{L}((1, 0, 1), (1, 0, -1))$  e  $\text{Im } F = \mathcal{L}(0, 1, 0)$  ]

(ii) Stabilire per quali valori di  $k$  l'endomorfismo  $F$  è diagonalizzabile. [per ogni  $k > -\frac{1}{16}$ ]

**Esercizio 6.** Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'endomorfismo associato rispetto alla base canonica alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se  $f$  è invertibile. [sì]

(ii) Determinare nucleo ed immagine di  $f$ . [Im  $F = \mathbb{R}^4$ , Ker  $F = \{ (0, 0, 0, 0) \}$ ]

(iii) Determinare gli autovalori di  $f$ . [1, -1]

(iv) Stabilire se  $f$  è diagonalizzabile. [no]

(v) Dimostrare che non esiste nessuna base di  $\mathbb{R}^4$  rispetto a cui la matrice associata ad  $f$  sia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{[le due matrici hanno polinomio caratteristico diverso]}$$

**Esercizio 7.** Si consideri l'endomorfismo  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che  $F(0, 0, 1, 0) = (1, 2, 1, 3)$ ,  $\text{Ker}(F) = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0))$  ed avente  $(0, 0, 0, 1)$  come autovettore associato all'autovalore  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Stabilire per quali valori di  $\lambda$   $F$  è diagonalizzabile.

[Deve aversi  $F(0, 0, 1, 0) = (1, 2, 1, 3)$ ,  $F(1, 1, 0, 0) = F(1, -1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$ ,  $F(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, \lambda)$ . Usando il teorema di estensione si trova che  $F(x, y, z, t) = (z, 2z, z, 3z + \lambda t)$ . Il polinomio caratteristico è  $p(x) = x^4 - \lambda x^3 - x^3 + \lambda x^2$ . Per ogni  $\lambda \neq 1$ , l'endomorfismo è diagonalizzabile.]

**Esercizio 8.** Sia data la matrice  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Sia  $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  tale che

$$F(A) = CAC^{-1}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

(i) Dimostrare che  $F$  è un endomorfismo di  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

(ii) Decidere se  $F$  è iniettivo. [sì]

(iii) Stabilire se  $F$  è diagonalizzabile.

[La matrice associata ad  $F$  rispetto alla base canonica è  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ . Gli autovalori sono 1, -1 entrambi con molteplicità due. L'applicazione è diagonalizzabile.]

**Esercizio 9.** Si consideri l'endomorfismo  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che

$$f(x, y, z, t) = (2x - y - z, y, z, z + 2t), \quad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

(i) Stabilire se esiste una base di  $\mathbb{R}^4$  costituita di autovettori di  $f$ .

[Sì,  $E(1) = \mathcal{L}((1, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 0))$ ,  $E(2) = \mathcal{L}((0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0))$ ]

(ii) Stabilire se  $f$  è un isomorfismo. [Sì]

(iii) Determinare esplicitamente l'insieme  $\{(x, y, z, t) \mid f(x, y, z, t) = (-x, -y, -z, -t)\}$ .

[L'insieme cercato è l'insieme degli autovettori di  $-1$  insieme al vettore nullo. Poiché  $-1$  non è autovalore, l'insieme è ridotto al solo vettore nullo.]

**Esercizio 10.** Stabilire per quali valori di  $k$  esiste una base di  $\mathbb{R}^4$  costituita da autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una tale base nel caso  $k = 1$ .

[Il polinomio caratteristico è  $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(k - \lambda^2)$ . La matrice è diagonalizzabile per ogni  $k > 0$ . Quando  $k = 1$  si ha  $E(0) = \mathcal{L}((1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0))$  ed  $E(-1) = \mathcal{L}(1, -1, -1, 0)$ ]

**Esercizio 11.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 - k \\ 0 & 0 & 2k - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con  $k$  parametro reale. Sia  $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione che ha  $A$  come matrice associata rispetto alla base canonica.

(i) Discutere al variare di  $k$  la surgettività di  $F$ .

[Si ha che  $\det A = (2k - 1)^2$ . Pertanto  $F$  è surgettiva se e solo se  $k \neq \frac{1}{2}$ .]

(ii) Determinare la dimensione di  $\text{Ker}(F)$  al variare di  $k$ .

[Per  $k \neq \frac{1}{2}$ , il nucleo è banale. Per  $k = \frac{1}{2}$  si ha  $\text{rk } A = 2$  e quindi  $\dim \text{Ker } F = 2$ ]

(iii) In corrispondenza dei valori di  $k$  per cui  $\dim \text{Ker}(F) = 2$ , scrivere esplicitamente l'espressione di  $F$  e stabilire se essa è diagonalizzabile.

[Siamo nel caso  $k = \frac{1}{2}$ . Si ha  $F(x, y, z, t) = (x - 2y + \frac{1}{2}t, y, x - y + \frac{1}{2}t, 0)$ . Essa non è diagonalizzabile.]

**Esercizio 12.** Sia dato l'endomorfismo diagonalizzabile  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  avente base diagonalizzante

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 1, -1)\}.$$

Si sa che 3 è autovalore di  $f$  e che  $f(v_1) = f(v_2)$ .

(i) Stabilire se  $f$  è iniettivo.

[no poiché  $f(v_1) = f(v_2)$ ]

(ii) Stabilire se  $f$  è surgettivo.

[no perché è un endomorfismo non iniettivo.]

(iii) Determinare una base di  $\text{Im}(f)$  ed una di  $\text{Ker}(f)$ .

[Siccome  $f(v_1) = f(v_2)$ , ne deduciamo che  $v_1 - v_2 \in \text{Ker } f$ . Inoltre per ipotesi  $v_1$  e  $v_2$  sono autovettori. Sia quindi  $f(v_1) = \lambda v_1$  e  $f(v_2) = \mu v_2$ . Dal fatto che  $f(v_1 - v_2) = \mathbf{0}$ , abbiamo che  $\lambda v_1 - \mu v_2 = \mathbf{0}$ , ed essendo  $v_1$  e  $v_2$  linearmente indipendenti per ipotesi, deve essere  $\lambda = \mu = 0$ . Quindi  $v_1$  e  $v_2$  sono autovettori associati a 0 e sono una base di  $\text{Ker } f = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ . Risulta poi che  $v_3$  è autovettore associato a 3. Quindi  $\text{Im } f = \mathcal{L}(v_3)$ .]

(iv) Calcolare esplicitamente  $f(x, y, z)$  per ogni  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

[Dalle condizioni  $f(1, 2, 0) = f(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$  e  $f(0, 1, -1) = (0, 3, -3)$ , si ricava che  $f(x, y, z) = (0, -3x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z, 3x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z)$ .]

**Esercizio 13.** Si consideri l'endomorfismo  $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definito da

$$F(x, y, z, t) = (y + z, -(1 + k^2)x - 2y - 2z - (1 + k^2)t, x + t, 0)$$

dove  $k$  è un parametro reale. Stabilire per quali valori di  $k$   $F$  è diagonalizzabile.

[Il polinomio caratteristico è  $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + k^2\lambda^2$ . L'endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se  $-1 < k < 1$  e  $k \neq 0$ .]

**Esercizio 14.** Sia data l'applicazione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $f(a, b, c) = (2b, a - b, b)$ . Stabilire per quali valori di  $k$  esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$  per cui

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

[L'endomorfismo  $f$  ha matrice associata rispetto alla base canonica  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Esso è diagonalizzabile poiché ha i tre autovalori distinti  $0, 1, -2$ . Sicché deve essere  $k = 0$ .]

**Esercizio 15.** È dato un endomorfismo non nullo  $F$  di  $\mathbb{R}^3$  il cui polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + k^2\lambda,$$

con  $k$  parametro reale.

- (i) Per quali valori di  $k$   $F$  è un isomorfismo? [no perché  $0$  è un autovalore di  $F$ ]  
 (ii) Per quali valori di  $k$   $F$  è diagonalizzabile? [per ogni  $k \neq 0$ ]

**Esercizio 16.** Sono dati i seguenti sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U = \{(x, y, z, t) \mid 2kx + y = 0, z + t = 0, y + z = 0\}$$

$$V = \{(x, y, z, t) \mid x + y + t = z = 0\}$$

$$W = \langle (h, 0, -h, 0), (h+1, 1, 0, h) \rangle.$$

Per quali valori reali di  $h$  e  $k$   $U, V$  e  $W$  sono autospazi di un endomorfismo diagonalizzabile di  $\mathbb{R}^4$ ?  
 [Deve essere  $U \oplus V \oplus W = \mathbb{R}^4$ . Si trova che  $h = 0$  e  $k \neq 0$ .]

**Esercizio 17.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale con  $\dim V \geq 1$ . Sia  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo non nullo tale che  $f^3 + f = 0$ .

- (i) Verificare che  $V = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .

[Ogni vettore  $v \in V$  può essere scritto come  $v = v + f^2(v) - f^2(v)$ . Si ha che  $v' \stackrel{\text{def}}{=} v + f^2(v) \in \text{Ker } f$  e che  $v'' \stackrel{\text{def}}{=} -f^2(v) \in \text{Im } f$ . Infatti  $f(v') = f(v) + f^3(v) = \mathbf{0}_V$  e  $v'' = f^2(v) = f(f(v)) \in \text{Im } f$ . Ne segue che  $V = \text{Ker } f + \text{Im } f$ .

Sia ora  $v \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ . Da un lato abbiamo che  $f(v) = \mathbf{0}_V$  poiché  $v \in \text{Ker } f$ , dall'altro  $v = f(w)$ , per qualche  $w \in V$ , visto che  $v \in \text{Im } f$ . Allora  $f^2(w) = f(v) = \mathbf{0}_V$ , e  $f^3(w) = \mathbf{0}_V$ . Infine  $v = f(w) = -f^3(w) = \mathbf{0}_V$ . Sicché  $\text{Ker } f$  e  $\text{Im } f$  sono a somma diretta.]

- (ii) Provare che il solo autovalore di  $f$  è quello banale e dedurre che  $f$  non è diagonalizzabile.

[Sia  $\lambda$  autovalore di  $f$  con autovettore associato  $v$ . Allora  $f(v) = \lambda v$ . Iterando  $f$  si trova che  $f^3(v) = \lambda^3 v$ . Pertanto  $(\lambda^3 + \lambda)v = \mathbf{0}_V$ . Da cui  $\lambda^3 + \lambda = 0$ , quindi  $\lambda = 0$ . L'unico autovalore di  $f$  è allora  $\lambda = 0$ . Se  $f$  fosse diagonalizzabile, avendo l'autovalore nullo con molteplicità  $3$ , dovrebbe essere l'endomorfismo nullo. Esso non è pertanto diagonalizzabile.]

**Esercizio 18.** Per ciascuna delle seguenti matrici  $A$ , determinare se possibile una matrice diagonale  $D$  ed una matrice invertibile  $P$  tali che  $D = P^{-1}AP$ :

(i)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  [ $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  e  $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ]

(ii)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$  [ $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  e  $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ]

(iii)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  [ $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  e  $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ]

(iv)  $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  [ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$  e  $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ]