Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 20178-2019
Foglio n.14 – Diagonalizzazione di endomorfismi

Esercizio 1. Sia data l'applicazione $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x,y) = (x-y,\ y), \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Verificare che F è lineare.

(ii) Stabilire se F è un automorfismo. [sì]

(iii) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ e rispetto alla base $\mathcal{B} = \{ (1,2),\ (-1,-1) \}$. [$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$]

(iv) Dato il vettore $v = (-1,3)$, calcolare l'immagine diretta del sottospazio $\mathcal{L}(v)$ e la controimmagine del vettore v sotto l'azione di F. [$F(\mathcal{L}(v)) = \mathcal{L}(-4,3),\ F^{-1}(v) = (2,3)$]

(v) Determinare tutti gli autovettori di F e stabilire se F è diagonalizzabile.
[non diagonalizzabile, non ci sono autovettori]

Esercizio 2. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x,y) = (x+y, x+y), \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Stabilire se F è un automorfismo. [no]

(ii) Determinare tutti gli autovettori di F e stabilire se F è diagonalizzabile.
[$E(0) = \mathcal{L}(1,-1)$, $E(2) = \mathcal{L}(1,1)$, diagonalizzabile]

Esercizio 3. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ tale che

$$F(1) = x^2 \qquad F(x) = -1 + x + x^2 \qquad F(x^2) = x^2.$$

(i) Stabilire se F è un automorfismo. [no]

(ii) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di F.
[$\operatorname{Ker} F = \mathcal{L}(x^2-1)$, $\operatorname{Im} F = \mathcal{L}(x^2,\ x^2+x-1)$]

(iii) Determinare autovalori ed autospazi di F. [$E(0) = \operatorname{Ker} F$, $E(1) = \mathcal{L}(x-1,\ x^2)$]

(iv) Stabilire se F è diagonalizzabile. [sì]

Esercizio 4. Sia data l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x,y,z) = (x-y+z,\ 2y,\ z), \qquad \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Determinare $\operatorname{Ker}(F)$ e $\operatorname{Im}(F)$. [$\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Ker} F = \{ (0,0,0) \}$]

(ii) Dato il vettore $v = (-1,0,1)$, calcolare l'immagine diretta del sottospazio $\mathcal{L}(v)$ e la controimmagine del vettore v sotto l'azione di F.
[$F(\mathcal{L}(v)) = \mathcal{L}(0,0,1)$, $F^{-1}(v) = \{ (-2,0,1) \}$]

(iii) Stabilire se F è diagonalizzabile. [no]

Esercizio 5. Sia data l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x,y,z) = (2y,\ kx-y+kz,\ 2y), \qquad \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

dove k è un parametro reale.

(i) Determinare al variare di k una base di $\operatorname{Ker}(F)$ e $\operatorname{Im}(F)$.
[per $k \neq 0$, $\operatorname{Ker} F = \mathcal{L}(1,0,-1)$ e $\operatorname{Im} F = \mathcal{L}((k,-1,k),(0,1,0))$
per $k = 0$, $\operatorname{Ker} F = \mathcal{L}((1,0,1),(1,0,-1))$ e $\operatorname{Im} F = \mathcal{L}(0,1,0)$]

(ii) Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo F è diagonalizzabile. [per ogni $k > -\frac{1}{16}$]

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo associato rispetto alla base canonica alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se f è invertibile. [sì]

(ii) Determinare nucleo ed immagine di f. [$\operatorname{Im} F = \mathbb{R}^4$, $\operatorname{Ker} F = \{ (0,0,0,0) \}$]

(iii) Determinare gli autovalori di f. [$1, -1$]

(iv) Stabilire se f è diagonalizzabile. [no]

(v) Dimostrare che non esiste nessuna base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui la matrice associata ad f sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. [le due matrici hanno polinomio caratteristico diverso]

Esercizio 7. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $F(0,0,1,0) = (1,2,1,3)$, $\operatorname{Ker}(F) = \mathcal{L}((1,1,0,0),(1,-1,0,0))$ ed avente $(0,0,0,1)$ come autovettore associato all'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$. Stabilire per quali valori di λ F è diagonalizzabile.

[Deve aversi $F(0,0,1,0) = (1,2,1,3)$, $F(1,1,0,0) = F(1,-1,0,0) = (0,0,0,0)$, $F(0,0,0,1) = (0,0,0,\lambda)$. Usando il teorema di estensione si trova che $F(x,y,z,t) = (z,\ 2z,\ z,\ 3z + \lambda t)$. Il polinomio caratteristico è $p(x) = x^4 - \lambda x^3 - x^3 + \lambda x^2$. Per ogni $\lambda \neq 1$, l'endomorfismo è diagonalizzabile.]

Esercizio 8. Sia data la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sia $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F(A) = CAC^{-1}, \qquad \forall A \in M_2(\mathbb{R}).$$

(i) Dimostrare che F è un endomorfismo di $M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Decidere se F è iniettivo. [sì]

(iii) Stabilire se F è diagonalizzabile.

[La matrice associata ad F rispetto alla base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Gli autovalori sono $1, -1$ entrambi con molteplicità due. L'applicazione è diagonalizzabile.]

Esercizio 9. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$f(x,y,z,t) = (2x - y - z, y, z, z + 2t), \qquad \forall\, (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4.$$

(i) Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^4$ costituita di autovettori di f.

[Sì, $E(1) = \mathcal{L}((1,0,1,-1),(1,1,0,0))$, $E(2) = \mathcal{L}((0,0,0,1),(1,0,0,0))$]

(ii) Stabilire se f è un isomorfismo. [Sì]

(iii) Determinare esplicitamente l'insieme $\{(x,y,z,t) \mid f(x,y,z,t) = (-x,-y,-z,-t)\}$.

[L'insieme cercato è l'insieme degli autovettori di -1 insieme al vettore nullo. Poiché -1 non è autovalore, l'insieme è ridotto al solo vettore nullo.]

Esercizio 10. Stabilire per quali valori di k esiste una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una tale base nel caso $k = 1$.

[Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(k - \lambda^2)$. La matrice è diagonalizzabile per ogni $k > 0$. Quando $k = 1$ si ha $E(1) = \mathcal{L}((1,0,0,1),(0,0,1,0),(1,1,0,0))$ ed $E(-1) = \mathcal{L}(1,-1,-1,0)$]

Esercizio 11. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 2k-1 & 0 \end{pmatrix}$$

con k parametro reale. Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione che ha A come matrice associata rispetto alla base canonica.

(i) Discutere al variare di k la surgettività di F.

[Si ha che $\det A = (2k-1)^2$. Pertanto F è surgettiva se solo se $k \neq \frac{1}{2}$.]

(ii) Determinare la dimensione di $\mathrm{Ker}(F)$ al variare di k.

[Per $k \neq \frac{1}{2}$, il nucleo è banale. Per $k = \frac{1}{2}$ si ha $\mathrm{rk}\, A = 2$ e quindi $\dim \mathrm{Ker}\, F = 2$]

(iii) In corrispondenza dei valori di k per cui $\dim \mathrm{Ker}(F) = 2$, scrivere esplicitamente l'espressione di F e stabilire se essa è diagonalizzabile.

[Siamo nel caso $k = \frac{1}{2}$. Si ha $F(x,y,z,t) = (x - 2y + \frac{1}{2}t,\ y,\ x - y + \frac{1}{2}t,\ 0)$. Essa non è diagonalizzabile.]

Esercizio 12. Sia dato l'endomorfismo diagonalizzabile $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente base diagonalizzante

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,2,0),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (0,1,-1)\}.$$

Si sa che 3 è autovalore di f e che $f(v_1) = f(v_2)$.

(i) Stabilire se f è iniettivo. [no poiché $f(v_1) = f(v_2)$]

(ii) Stabilire se f è surgettivo. [no perché è un endomorfismo non iniettivo.]

(iii) Determinare una base di $\mathrm{Im}(f)$ ed una di $\mathrm{Ker}(f)$.

[Siccome $f(v_1) = f(v_2)$, ne deduciamo che $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}\, f$. Inoltre per ipotesi $v1$ e v_2 sono autovettori. Sia quindi $f(v_1) = \lambda v_1$ e $f(v_2) = \mu v_2$. Dal fatto che $f(v_1 - v_2) = \mathbf{0}$, abbiamo che $\lambda v_1 - \mu v_2 = \mathbf{0}$, ed essendo v_1 e v_2 linearmente indipendenti per ipotesi, deve essere $\lambda = \mu = 0$. Quindi v_1 e v_2 sono autovettori associati a 0 e sono una base di $\mathrm{Ker}\, f = \mathcal{L}(v_1, v_2)$. Risulta poi che v_3 è autovettore associato a 3. Quindi $\mathrm{Im}\, f = \mathcal{L}(v_3)$.]

(iv) Calcolare esplicitamente $f(x,y,z)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

[Dalle condizioni $f(1,2,0) = f(0,1,1) = (0,0,0)$ e $f(0,1,-1) = (0,3,-3)$, si ricava che $f(x,y,z) = (0,\ -3x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z,\ 3x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z)$.]

Esercizio 13. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da

$$F(x,y,z,t) = (y + z,\ -(1+k^2)x - 2y - 2z - (1+k^2)t,\ x + t,\ 0)$$

dove k è un parametro reale. Stabilire per quali valori di k F è diagonalizzabile.

[Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + k^2\lambda^2$. L'endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se $-1 < k < 1$ e $k \neq 0$.]

Esercizio 14. Sia data l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(a,b,c) = (2b, a-b, b)$. Stabilire per quali valori di k esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

[L'endomorfismo f ha matrice associata rispetto alla base canonica $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Esso è diagonalizzabile poiché ha i tre autovalori distinti $0, 1, -2$. Sicché deve essere $k = 0$.]

Esercizio 15. È dato un endomorfismo non nullo F di $\mathbb{R}^3$ il cui polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + k^2\lambda,$$

con k parametro reale.

(i) Per quali valori di k F è un isomorfismo? [no perché 0 è un autovalore di F]

(ii) Per quali valori di k F è diagonalizzabile? [per ogni $k \neq 0$]

Esercizio 16. Sono dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x,y,z,t) \mid 2kx + y = 0,\ z + t = 0,\ y + z = 0\}$$

$$V = \{(x,y,z,t) \mid x + y + t = z = 0\}$$

$$W = \langle (h, 0, -h, 0), (h+1, 1, 0, h) \rangle .$$

Per quali valori reali di h e k U, V e W sono autospazi di un endomorfismo diagonalizzabile di $\mathbb{R}^4$?
[Deve essere $U \oplus V \oplus W = \mathbb{R}^4$. Si trova che $h = 0$ e $k \neq 0$.]

Esercizio 17. Sia V uno spazio vettoriale reale con $\dim V \geqslant 1$. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo non nullo tale che $f^3 + f = 0$.

(i) Verificare che $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
[Ogni vettore $v \in V$ può essere scritto come $v = v + f^2(v) - f^2(v)$. Si ha che $v' \overset{\text{def}}{=} v + f^2(v) \in \operatorname{Ker} f$ e che $v'' \overset{\text{def}}{=} -f^2(v) \in \operatorname{Im} f$. Infatti $f(v') = f(v) + f^3(v) = \mathbf{0}_V$ e $v'' = f^2(v) = f(f(v)) \in \operatorname{Im} f$. Ne segue che $V = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Sia ora $v \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Da un lato abbiamo che $f(v) = \mathbf{0}_V$ poiché $v \in \operatorname{Ker} f$, dall'altro $v = f(w)$, per qualche $w \in V$, visto che $v \in \operatorname{Im} f$. Allora $f^2(w) = f(v) = \mathbf{0}_V$, e $f^3(w) = \mathbf{0}_V$. Infine $v = f(w) = -f^3(w) = \mathbf{0}_V$. Sicché $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ sono a somma diretta.]

(ii) Provare che il solo autovalore di f è quello banale e dedurne che f non è diagonalizzabile.
[Sia λ autovalore di f con autovettore associato v. Allora $f(v) = \lambda v$. Iterando f si trova che $f^3(v) = \lambda^3 v$. Pertanto $(\lambda^3 + \lambda)v = \mathbf{0}_V$. Da cui $\lambda^3 + \lambda = 0$, quindi $\lambda = 0$. L'unico autovalore di f è allora $\lambda = 0$. Se f fosse diagonalizzabile, avendo l'autovalore nullo con molteplicità 3, dovrebbe essere l'endomorfismo nullo. Esso non è pertanto diagonalizzabile.]

Esercizio 18. Per ciascuna delle seguenti matrici A, determinare se possibile una matrice diagonale D ed una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$:

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ [$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$]

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ [$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$]

(iii) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ [$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$]

(iv) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ [$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$]