Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.14 – Integrali

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

(i) $\int x^5 dx$ $[\frac{1}{6}x^6 + c]$

(ii) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3\right) dx$ $[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 3x + c]$

(iii) $\int (x-1)(2x+5) dx$ $[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + c]$

(iv) $\int \frac{1+x^2}{3x} dx$ $[\frac{x^2}{6} + \frac{1}{3}\log|x| + c]$

(v) $\int x\sqrt[3]{1+x^2} dx$ $[\frac{3}{8}(1+x^2)\sqrt[3]{1+x^2} + c]$

(vi) $\int \cos^3 x \sin x \, dx$ $[-\frac{1}{4}\cos^4 x + c]$

(vii) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$ $[\log(e^x+1) + c]$

(viii) $\int \tan x dx$ $[-\log|\cos x| + c]$

(ix) $\int \frac{1}{x\log x} dx$ $[\log|\log x| + c]$

(x) $\int \frac{x+1}{x-1} dx$ $[x + 2\log|x-1| + c]$

(xi) $\int x \sin x^2 dx$ $[-\frac{1}{2}\cos x^2 + c]$

(xii) $\int \cos^2 x \, dx$ $[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c]$

(xiii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ $[\frac{1}{2}\arcsin 2x + c]$

(xiv) $\int \frac{x}{1+4x^4} dx$ $[\frac{1}{4}\operatorname{arctg} 2x^2 + c]$

(xv) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$ $[x - \operatorname{arctg} x + c]$

(xvi) $\int \frac{1}{3+x^2} dx$ $[\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + c]$

(xvii) $\int \frac{e^{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ $[2e^{2+\sqrt{x}} + c]$

(xviii) $\int \frac{1}{\sqrt{4-25x^2}} dx$ $[\frac{1}{5}\arcsin\frac{5}{2}x + c]$

(xix) $\int \frac{1}{3x^2+x+1} dx$ $[\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6x+1}{\sqrt{11}}\right) + c]$

(xx) $\int \frac{1}{x^2-x+1} dx$ $[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c]$

(xxi) $\displaystyle\int \frac{3\sin^2 x}{2+2\cos x}dx$ $\quad\left[\,\frac{3}{2}(x-\sin x)+c\,\right]$

(xxii) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x dx$ $\quad\left[\,\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+c\,\right]$

(xxiii) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{x-2}dx$ $\quad[\,2x-\log|x-2|+c\,]$

(xxiv) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$ $\quad\left[\,\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+c\,\right]$

(xxv) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$ $\quad\left[\,\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+c\,\right]$

(xxvi) $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^2+16}dx$ $\quad\left[\,x-4\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\log(x^2+16)+c\,\right]$

(xxvii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}dx$ $\quad\left[\,\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c\,\right]$

(xxviii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+4}dx$ $\quad\left[\,\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+c\,\right]$

(xxix) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+25}dx$ $\quad\left[\,\log(x^2+25)+\frac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{5}+c\,\right]$

(xxx) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$ $\quad\left[\,\frac{1}{2}\log^2 x+c\,\right]$

(xxxi) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}dx$ $\quad[\,2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}+c\,]$

(xxxii) $\displaystyle\int \frac{x\sqrt{x}}{1+x}dx$ $\quad\left[\,\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}+c\,\right]$

(xxxiii) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx$ $\quad\left[\,\frac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})+c\,\right]$

(xxxiv) $\displaystyle\int \sqrt{3-x^2}dx$ $\quad\left[\,\frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}x\sqrt{3-x^2}+c\,\right]$

(xxxv) $\displaystyle\int \log x dx$ $\quad[\,x(\log x-1)+c\,]$

(xxxvi) $\displaystyle\int xe^{3x}dx$ $\quad\left[\,\frac{1}{9}e^{3x}(3x-1)+c\,\right]$

(xxxvii) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x dx$ $\quad\left[\,\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\log x-2)+c\,\right]$

(xxxviii) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$ $\quad[\,-e^{-x}(x+1)+c\,]$

(xxxix) $\displaystyle\int x\sin x dx$ $\quad[\,\sin x-x\cos x+c\,]$

(xl) $\displaystyle\int \mathrm{arctg}\, x dx$ $\quad[\,x\,\mathrm{arctg}\,x-\log\sqrt{1+x^2}+c\,]$

(xli) $\displaystyle\int \log(1+x^2)dx$ $\quad[\,x\log(1+x^2)-2x+2\,\mathrm{arctg}\,x+c\,]$

(xlii) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$ $\quad\left[\,\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+c\,\right]$

(xliii) $\displaystyle\int \frac{x+\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\quad\left[\,-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}\arcsin^3 x+c\,\right]$

(xliv) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ $\quad$ [Si ponga $t=\sqrt{x+1}$. Si trova $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+c$]

(xlv) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$ $\quad$ [Si ponga $x=\sin^2 t$. Si trova $2\arcsin\sqrt{x}+c$]

(xlvi) $\displaystyle\int e^x \sin 2x dx$ $\quad [\,\frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) + c\,]$

(xlvii) $\displaystyle\int \log(x^2+1) dx$ $\quad [\,x\log(x^2+1) - 2x + 2\,\mathrm{arctg}\, x + c\,]$

(xlviii) $\displaystyle\int (x^2-2x+5)e^{-x} dx$ $\quad [\,-e^{-x}(x^2+5) + c\,]$

(xlix) $\displaystyle\int (x^2+5x+6)\cos 2x dx$ $\quad [\,\frac{1}{4}(2x^2+10x+12)\sin 2x + \frac{1}{4}(2x+5)\cos 2x + c\,]$

(l) $\displaystyle\int x^2 \,\mathrm{arctg}\, 3x dx$ $\quad [\,\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\, 3x - \frac{x^2}{18} - \frac{1}{162}\log(9x^2+1) + c\,]$

(li) $\displaystyle\int \frac{4x^2-16x+4}{x^3-3x^2-x+3} dx$ $\quad [\,2\log|x-1| + 3\log|x+1| - \log|x-3| + c\,]$

(lii) $\displaystyle\int \frac{x^5-7x^4+8x^3+15x^2-26x+13}{x^2-7x+10} dx$ $\quad [\,\frac{x^2}{4} - x^2 + x + \frac{8}{3}\log|x-5| - \frac{5}{3}\log|x-2| + c\,]$

(liii) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+3}{x^3(x-1)} dx$ $\quad [\,\log(x-1)^2 - \log|x| + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + c\,]$

(liv) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+7}{(x-2)^4} dx$ $\quad [\,-\frac{3}{x-2} - \frac{7}{2(x-2)^2} - \frac{3}{(x-2)^3} + c\,]$

(lv) $\displaystyle\int \frac{x^3+x-2}{(x+1)^2(x^2-x+1)} dx$ $\quad [\,\frac{4}{3(x+1)} + \frac{1}{2}\log(x^2-x+1) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c\,]$

(lvi) $\displaystyle\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2} dx$ $\quad [\,\frac{3}{2x} - \frac{5}{4}\log|x| + 20\log|x-3| - \frac{47}{4}\log|x-2| + c\,]$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali definiti:

(i) $\displaystyle\int_0^2 (3x^2-2x+5) dx$ $\quad [\,14\,]$

(ii) $\displaystyle\int_0^9 (\sqrt{x}-x) dx$ $\quad [\,-\frac{45}{2}\,]$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 x dx$ $\quad [\,\frac{\pi-2}{4}\,]$

(iv) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1} dx$ $\quad [\,\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,]$

(v) $\displaystyle\int_2^5 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$ $\quad [\,\log 31 - \log 7\,]$

(vi) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+5x+6} dx$ $\quad [\,2\log 2 - \log 3\,]$

(vii) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x dx$ $\quad [\,12(\pi-2)\,]$

(viii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos x dx$ $\quad [\,\frac{3}{8}\,]$

(ix) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$ $\quad [\,1\,]$

(x) $\displaystyle\int_2^3 \log x dx$ $\quad [\,\log\frac{27}{4} - 1\,]$

(xi) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-4}{x^2-3x+2} dx$ $\quad [\,3\log 3 - 5\log 2\,]$

(xii) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} e^x\cos x dx$ $\quad [\,\frac{\sqrt{3}+1}{4}(e^{\frac{\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{6}})\,]$

(xiii) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+2x-3} dx$ $\quad [\,\frac{1}{2}\log\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\log 3\,]$

(xiv) $\displaystyle\int_2^3 x\sqrt{2x^2+1}dx$ $\left[\,\frac{1}{6}(19\sqrt{19}-27)\,\right]$

(xv) $\displaystyle\int_0^{-\log 2} \sqrt{1-e^{2x}}dx$ $\left[\,\frac{\sqrt{3}}{2}+\log(2-\sqrt{3})\,\right]$

(xvi) $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\log x dx$ $\left[\,4\log 2-\frac{7}{4}\,\right]$

Esercizio 3. Sia $k>0$. Si risolva l'integrale

$$I_k = \int_0^k x^2 e^{-x} dx$$

e si calcoli il limite

$$\lim_{k\to+\infty} I_k.$$

Esercizio 4. Spiegare perché l'integrale definito

$$\int_{-3}^3 \frac{x^2 \sin 2x}{x^2+1} dx$$

è nullo evitando di passare per il calcolo diretto.

Esercizio 5. Determinare l'area del segmento parabolico determinato dalla parabola $y=-x^2+4x-1$ e dalla retta $y=2$. $\left[\,\frac{4}{3}\,\right]$

Esercizio 6. Determinare l'area del segmento parabolico determinato dalla parabola $y=-x^2+6x-5$ dalla retta $y=x+1$ e dall'asse x. $\left[\,\frac{21}{2}\,\right]$

Esercizio 7. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\int_0^x \sin t \cos t\, dt}$$

[Si applichino il teorema di De l'Hospital e il teorema di Torricelli-Barrow. Si trova che il limite vale 1.]

Esercizio 8. Si verifichi che la funzione

$$f(x) = \int_0^x (5-\sin^5 2t),$$

definita in $[0,\pi]$, è invertibile (a valori sulla propria immagine). Calcolare poi la derivata dell'inversa di f nel punto $y_0 = f(\frac{\pi}{2})$.

Esercizio 9. Determinare in quale punto dell'intervallo $[2,e]$ la funzione $f(x)=\frac{1}{2x}$ assume la sua media integrale. $\left[\,x_0 = \frac{e-2}{1-\log 2}\,\right]$

Esercizio 10. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

(i) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \log t\, dt$, con $x>0$. $[\,\log x\,]$

(ii) $F(x) = \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\, dt$ $[\,-\sqrt{x^4+1}\,]$

(iii) $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt$ $[\,2xe^{-x^4}-e^{-x^2}\,]$

Esercizio 11. Verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_{-x}^x \sin t^2\, dt}{x^3} = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 12. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{per } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2 & \text{per } 3 < x \leqslant 6 \end{cases}$$

Verificare che, pur essendo f non continua nel suo dominio, la sua funzione integrale è continua. Dare una interpretazione geometrica di tale fenomeno.

[Integrando i due rami separatamente si trova che $F(x) = \begin{cases} 3x-3 & \text{per } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x & \text{per } 3 < x \leqslant 6 \end{cases}$]

Esercizio 13. Senza passare per il calcolo diretto, determinare il segno del seguente integrale definito:

$$\int_{-2}^{4} \frac{x^2}{x^2+1} dx.$$

[positivo]

Esercizio 14. Senza passare per il calcolo diretto, determinare il segno del seguente integrale definito:

$$\int_{0}^{\pi} x \sin x \, dx.$$

[positivo]

Esercizio 15. Sia data la funzione

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{t^2-1}{t^2+1} dt.$$

Studiare la monotonia di F.
[La derivata di F è $F'(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Essa è positiva in $[-1,1]$, intervallo in cui F è quindi crescente.]

Esercizio 16. Determinare la retta tangente al grafico della funzione

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{t}{t^4+1} dt$$

nel suo punto di ascissa $x = 1$.