Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.15 – Curve e integrali curvilinei

Esercizio 1. Fornire due parametrizzazioni distinte della semicirconferenza centrata nell'origine, di raggio 2 e compresa secondo e terzo quadrante.

[Si osservi che oltre che in coordinate polari la semicirconferenza può essere vista come il grafico di una funzione cartesiana...]

Esercizio 2. Calcolare la lunghezza dell'arco di cicloide (descritta da una circonferenza di raggio 2) di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2\,(t - \sin t) \\ y = 2\,(1 - \cos t) \end{cases}$$

con $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Calcolare inoltre il suo baricentro. [16, $G(2\pi,\ \frac{4}{3})$]

Esercizio 3. Utilizzando la sua equazione polare, misurare la lunghezza di un arco di circonferenza di raggio r sotteso ad un angolo al centro di ampiezza θ. Calcolare inoltre il suo baricentro. [$l = r\theta$]

Esercizio 4. Calcolare la lunghezza e il baricentro della curva di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = 1 \end{cases}$$

con $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. [$l = \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$, $G(\frac{1}{l}\frac{\sqrt{2}(e^{\pi}-2)}{5};\ \frac{1}{l}\frac{\sqrt{2}(e^{\pi}+1)}{5})$]

Esercizio 5. È data la curva di equazioni parametriche:

$$\gamma : \begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 \end{cases}$$

con $t \in [-2, 2]$.

(i) Stabilire se γ è aperta, chiusa, regolare, semplice. [aperta, non semplice, regolare]

(ii) Determinare la retta tangente a γ nel punto $\gamma(1)$. [$x - y + 1 = 0$]

(iii) Provare che il punto $P(0, 1)$ è un punto doppio per γ e determinare le rette tangenti a γ in P. [$y = \pm x + 1$]

(iv) Dire se γ può essere rappresentata per mezzo di un'equazione cartesiana algebrica. [$x^2 = y(y - 1)^2$]

Esercizio 6. Dopo averlo rappresentato graficamente, calcolare lunghezza e baricentro dell'elica di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = 5\theta \end{cases}$$

dove $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. [$l = 2\pi\sqrt{26}$]

Esercizio 7. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma (x+y^3)ds$ dove Γ è il segmento del piano che congiunge l'origine ed il punto $(1,1)$. Dare un'interpretazione geometrica di tale integrale.

Esercizio 8. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma x^2 y ds$ dove Γ ha equazioni parametriche $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ con $0 \leqslant t \leqslant \pi$. [32/3]

Esercizio 9. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma yzds$ dove Γ è la curva di equazioni parametriche $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ con $0 \leqslant t \leqslant \pi$. [$\pi\sqrt{2}$]

Esercizio 10. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma 2xyzds$ dove Γ è il segmento che congiunge $A(1,2,-1)$ e $B(-2,1,3)$. Determinare inoltre il baricentro di AB e verificare che coincide con il suo punto medio.

Esercizio 11. Si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \sqrt{9x^2 + 16x + 8}\, ds\,,$$

dove γ è definita da

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

con $t \in [0,\, 1]$. [32/15]

Esercizio 12. Sia data la curva algebrica piana $y^2 = x^3$ (parabola cuspidata di Newton). Calcolare la lunghezza del suo tratto per $1 \leqslant x \leqslant 4$. [$\frac{8}{27}(\sqrt[3]{100} - \frac{\sqrt[3]{169}}{8})$]

Esercizio 13. Descrivere la curva definita dalle relazioni $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Esercizio 14. Provare che la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = 2t \\ y = -\sqrt{2}t^2 \\ z = \frac{2}{3}t^3 + 1, \end{cases}$$

con $t \in [-2, 3]$, è una curva sghemba. Calcolare la sua lunghezza e il suo baricentro.

Esercizio 15. Sia data la curva polare di equazione $\rho = e^\theta$, detta spirale logaritmica.

(i) Disegnarne il suo grafico.

(ii) Provare che essa non è una curva algebrica.

[Interseca infinite volte l'asse x, contraddicendo il teorema di Bézout.]

(iii) Calcolarne la sua lunghezza per $\theta \in [\alpha,\, \beta]$.

[$\sqrt{2}(e^b - e^a)$]

(iv) Provare che l'angolo formato tra la retta tangente a γ in un suo punto $\gamma(\theta)$ e la retta che congiunge l'origine con $\gamma(\theta)$ è costante. (Teorema di Cartesio)

[Basta provare che è costante il coseno di tale angolo...]

(v) Provare che il tratto infinito di spirale che si ottiene per $\theta \in [-\infty, a]$, ha lunghezza finita. (Paradosso di Torricelli).

Esercizio 16. Preso $r > 0$, si consideri la porzione di corona circolare

$$C_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r - \epsilon \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant r + \epsilon,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\},$$

al variare di $\epsilon \in (0, r)$. Provare che per $\epsilon \to 0$, il baricentro di C_ϵ tende al baricentro dell'arco di circonferenza di raggio r, centrato nell'origine e compreso nel primo quadrante.

Esercizio 17. Trovare equazioni parametriche per le seguenti curve algebriche:

(i) $x^2 + 4y^2 = 4$

(ii) $y^2 = x^3$

(iii) $y^2 = (x - 1)x^2$

Esercizio 18. Si consideri la curva polare di equazione $\rho = \sin\theta$, con $\theta \in [0, \pi]$. Si tracci il suo grafico, si trovi il suo baricentro e si calcoli la sua lunghezza.

Esercizio 19. Si consideri la curva polare di equazione $\rho = \theta^2$.

(i) Provare che la curva non è semplice per $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$.

(ii) Dopo aver provato che è regolare, calcolare la lunghezza della curva per $\theta \in [0, 2\pi]$.

$[\frac{8}{3}[\sqrt[3]{(\pi^2 + 1)^2} - 1]]$

Esercizio 20. Determinare le curve podali rispetto all'origine delle seguenti curve piane:

(i) $x = 0$

[La podale di una retta rispetto ad un punto è la proiezione del piede sulla retta. In questo caso l'origine stesso.]

(ii) $y = x$ [l'origine]

(iii) $x + y + 1 = 0$

(iv) $\rho = 1$

[La curva in questione è una circonferenza centrata nell'origine. La podale è allora la circonferenza stessa.]

(v) $\rho = 2\cos\theta$

[La curva considerata può essere portata in forma cartesiana nel seguente modo: $\rho = 2\cos\theta \ \Rightarrow\ \rho^2 = 2\rho\cos\theta \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$, che è quindi una circonferenza. Graficamente si trova che la podale rispetto all'origine è una cardioide. Lo si dimostri algebricamente.]

(vi) $y = 4x^2$

(vii) $y = x^2 + 1$