Sapienza Università di Roma - Facoltà I3S
Corso di Laurea in Statistica Economia Finanza e Assicurazioni
Corso di Laurea in Statistica Economia e Società
Corso di Laurea in Statistica gestionale
Matematica II corso - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.15 – Integrali impropri

Esercizio 1. Stabilire se i seguenti integrali impropri sono convergenti e, se possibile, calcolarli:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad[\frac{\pi}{2}]$

(ii) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ $\quad$[diverge]

(iii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ $\quad$[diverge]

(iv) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}$ $\quad[3\sqrt[3]{2}]$

(v) $\displaystyle\int_0^1 x\log x^2\,dx$ $\quad[\frac{1}{4}]$

(vi) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$ $\quad$[diverge]

(vii) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+4}$ $\quad[\frac{\pi}{4}]$

(viii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ $\quad[\pi]$

(ix) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ $\quad[2]$

(x) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2+x+1}dx$

[L'integrale non è calcolabile elementarmente. Usiamo i criteri studiati. Osserviamo che la funzione integranda non ha asintoti verticali, allora ci interessa solo il suo comportamento in un intorno di $+\infty$. Siccome $0\leqslant|\sin x|\leqslant 1$, si ha che $0\leqslant\frac{|\sin x|}{x^2+x+1}\leqslant\frac{1}{x^2+x+1}$. Allora l'integrale improprio dato è minore dell'integrale improprio $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}$. Spezzandolo in due addendi (ad esempio nel punto intermedio 1), si trova che $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}$ ha lo stesso carattere dell'integrale $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}$ che sappiamo essere convergente. Allora anche l'integrale di partenza è convergente.]

(xi) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x}dx$

[La funzione integranda ha un asintoto verticale intorno a 0. Inoltre nell'intervallo dato è positiva. È conveniente utilizzare il criterio del confronto asintotico. Dai limiti notevoli abbiamo che $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=1$ e che $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ quindi complessivamente abbiamo che $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sqrt{x}}=1$. Usando la funzione $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ che è integrabile in senso improprio intorno a 0 (con $\alpha=\frac{1}{2}<1$), si trova che anche l'integrale di partenza converge.]

(xii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^7+2}}dx$

[La funzione data non presenta asintoti verticali e in un intorno di $+\infty$ è positiva. Conviene allora utilizzare il criterio del confronto asintotico. Si trova che la funzione integranda è equivalente a $\frac{x^2}{x^{\frac{7}{2}}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Poiché $\alpha=\frac{3}{2}>1$, l'integrale dato converge.]