

Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2018-2019
Foglio n.15 – Spazi vettoriali euclidei

N.B. Negli esercizi seguenti si lavori rispetto al prodotto scalare standard.

Esercizio 1. Determinare per quali valori di k i seguenti vettori v e w sono ortogonali:

- (i) $v = (2, 1, 0, -k)$ e $w = (-2, 0, \pi, -k)$ in \mathbb{R}^4 ; [$k = \pm 2$]
- (ii) $v = (1, -1, k)$ e $w = (k, 1, k)$ in \mathbb{R}^3 ; [$k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$]
- (iii) $v = (k^2, -1, -5)$ e $w = (2, 3, k)$ in \mathbb{R}^3 . [$k = 3, -\frac{1}{2}$]

Esercizio 2. Determinare l'angolo (anche a meno del segno) compreso tra i seguenti vettori :

- (i) $v = (2, 1)$ e $w = (-1, 2)$ in \mathbb{R}^2 ; [$\theta = \frac{\pi}{2}$]
- (ii) $v = (0, 1, 1)$ e $w = (1, 2, 1)$ in \mathbb{R}^3 ; [$\theta = \frac{\pi}{6}$]
- (iii) $v = (5, 0, \sqrt{10}, -1)$ e $w = (-1, 0, 0, 1)$ in \mathbb{R}^4 ;
- (iv) $v = (-1, 0, -1)$ e $w = (1, 2, 0)$ in \mathbb{R}^3 . [$\theta = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{10}})$]

Esercizio 3. Nel sottospazio $U = \mathcal{L}((1, -1, 1), (0, 1, 2), (-1, 2, 3))$ di \mathbb{R}^3 trovare due vettori che formano un angolo di $\frac{3}{4}\pi$ radianti.

[Lo spazio U coincide con \mathbb{R}^3 . Basta allora cercare tali vettori in \mathbb{R}^3 . Si prendano ad esempio $v = (1, 0, 0)$ e $w = (-1, 1, 0)$]

Esercizio 4. Sia dato in \mathbb{R}^2 il vettore $v = (1, 3)$. Determinare il versore ortogonale a v formante col vettore $u = (1, -1)$ un angolo ottuso. Determinare poi tutti i vettori paralleli a v di lunghezza 3.

$$[\hat{v} = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}), w = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}(1, 3)]$$

Esercizio 5. Verificare che i vettori di \mathbb{R}^3 $v = (1, -2, 1)$ e $w = (1, 1, 1)$ sono ortogonali e determinare una base ortogonale di \mathbb{R}^3 che li contiene. [si prenda $u = (1, 0, -1)$]

Esercizio 6. Determinare una base ortonormale \mathcal{B} di \mathbb{R}^3 che contiene il versore associato al vettore $v = (1, 2, 1)$. Scrivere le matrici di passaggio dalla base canonica alla base \mathcal{B} e dalla base \mathcal{B} alla base canonica. Verificare che sono matrici ortogonali.

[Usiamo i vettori $w = (1, -1, 1)$ e $u = (1, 0, -1)$, si ottiene la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$]

Esercizio 7. Sia dato in \mathbb{R}^3 il piano vettoriale $W = \mathcal{L}(v_1, v_2)$, dove $v_1 = (1, 1, -1)$ e $v_2 = (1, 1, 2)$. Verificare che l'applicazione $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che ad ogni vettore di \mathbb{R}^3 associa la sua proiezione ortogonale su W è un endomorfismo. Trovare $\text{Ker } F$ e $\text{Im } F$ e provare che sono sottospazi complementari in \mathbb{R}^3 . Stabilire inoltre se F è diagonalizzabile.

Esercizio 8. Si considerino i vettori in \mathbb{R}^3

$$v_1 = (1, 2, -1) \quad v_2 = (1, 0, 1) \quad v_3 = (1, 2, 0)$$

- (i) Calcolare $\|v_1\|$, $\|v_2\|$ e $\|v_3\|$. [$\sqrt{6}, \sqrt{2}, \sqrt{5}$]

- (ii) Calcolare gli angoli individuati dai tre vettori.

$$[\theta_{12} = \frac{\pi}{2}, \theta_{13} = \arccos(\frac{\sqrt{5}}{6}), \theta_{23} = \arccos(\frac{1}{\sqrt{10}})]$$

- (iii) Determinare tutti i vettori contemporaneamente ortogonali a v_1 e v_2 e provare che formano un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 . [$(v_1, v_2)^\perp = \mathcal{L}(1, -1, -1)$]

- (iv) Calcolare tutti i vettori ortogonali a $w = \frac{1000}{873}v_3$. [si ottiene v_3^\perp]

(v) Determinare la proiezione ortogonale di v_1 e v_3 sulla direzione del vettore v_2 .

$$[P_{v_2}(v_1) = (0, 0, 0), P_{v_2}(v_3) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})]$$

Esercizio 9. Determinare in \mathbb{R}^3 il vettore proiezione ortogonale del vettore $v = (0, 1, 2)$ sul sottospazio W generato dai vettori $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1)$.

$$[P_W(v) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)]$$

Esercizio 10. Determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 a partire dalla base

$$\mathcal{B} = \{ (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 1, -1) \}$$

$$[\mathcal{B} = \{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \}]$$

Esercizio 11. Determinare una base ortonormale del complemento ortogonale di

$$U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0 \}$$

Esercizio 12. Trovare una base ortogonale ed una base ortonormale del sottospazio di \mathbb{R}^5 definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 13. Dato il parallelogramma $ABCD$, provare che

$$\| \overrightarrow{AC} \|^2 + \| \overrightarrow{BD} \|^2 = 2 \| \overrightarrow{AB} \|^2 + 2 \| \overrightarrow{BC} \|^2$$

Determinare un punto D in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tale che il quadrilatero $ABCD$ sia un parallelogramma, dove $A(-1, -1, 2)$, $B(3, 2, 2)$ e $C(2, -2, 2)$. Verificare l'identità del parallelogramma per $ABCD$.

Esercizio 14. Siano v e w due vettori di \mathbb{R}^n . Dimostrare che vale la *prima formula di polarizzazione*:

$$v \cdot w = \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

Esercizio 15. Siano v e w due vettori di \mathbb{R}^n . Dimostrare che vale la *seconda formula di polarizzazione*:

$$v \cdot w = \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$$

Esercizio 16. Applicare il procedimento ortogonale di Gram-Schmidt ai vettori

$$v_1 = (1, 2, -1) \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (0, -1, 2)$$

per determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 .

Esercizio 17. Siano U e W sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^n . Provare che

(i) $(W^\perp)^\perp = W$

(ii) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

(iii) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

(iv) $U \subseteq W \Rightarrow W^\perp \subseteq U^\perp$

[Sia $v \in W^\perp$. Allora v è ortogonale a tutti i vettori di W , in particolare è ortogonale a tutti i vettori di U . Sicché $v \in U^\perp$.]

Esercizio 18. Sia W il sottospazio di \mathbb{R}^3 generato dai vettori $w_1 = (-1, 0, 1)$ e $w_2 = (2, 1, 0)$. Decomporre il vettore $v = (1, 1, -1)$ secondo i sottospazi W e W^\perp .

Esercizio 19. Determinare una base ortonormale del sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori

$$v_1 = (1, 1, 1, 0) \quad v_2 = (-1, 1, -1, 0) \quad v_3 = (1, 0, 1, 0)$$

Esercizio 20. Siano v_1, v_2, \dots, v_m versori a due a due ortogonali di \mathbb{R}^n . Dimostrare che $m \leq n$.

Esercizio 21. Calcolare una base ortonormale del sottospazio di \mathbb{R}^4

$$U = \mathcal{L}((0, -2, 4, 1), (25, 8, 29, 3000), (0, 2, 1, 1), (-1, 2, 1/2, 3), (0, 1, 1, 1))$$

[Si ha che $U = \mathbb{R}^4$. Si scelga la base canonica.]

Esercizio 22. Determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^4 a partire dai vettori

$$v_1 = (1, 2, 0, 0) \quad v_2 = (0, 1, -1, 0) \quad v_3 = (0, 0, 1, -1) \quad v_4 = (0, 0, 0, 5)$$

Esercizio 23. Determinare una base ortonormale del sottospazio W di \mathbb{R}^3 definito dall'equazione $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Completare la base ortonormale trovata per W ad una base ortonormale di \mathbb{R}^3 . Decomporre il vettore $u = (1, 2, -1)$ secondo W e W^\perp .

Esercizio 24. Sia dato in \mathbb{R}^3 il sottospazio

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = x - z = 0 \}$$

(i) Determinare una base di W e di W^\perp . [$W = \mathcal{L}(2, 1, 2)$ e $W^\perp = \mathcal{L}((1, -2, 0), (1, 0, -1))$]

(ii) Determinare una base ortogonale di W e di W^\perp .

$$[W = \mathcal{L}(2, 1, 2) \text{ e } W^\perp = \mathcal{L}((1, -2, 0), (\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -1))]]$$

(iii) Determinare una base ortonormale di W e di W^\perp .

$$[W = \mathcal{L}(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \text{ e } W^\perp = \mathcal{L}((\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0), (\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{5}{3\sqrt{5}}))]]$$

Esercizio 25. Sia dato in \mathbb{R}^4 il sottospazio

$$W = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = 2y - t = 0 \}$$

(i) Determinare una base di W e di W^\perp .

(ii) Determinare una base ortogonale di W e di W^\perp .

(iii) Determinare una base ortonormale di W e di W^\perp .

Esercizio 26. Sia dato in \mathbb{R}^5 il sottospazio

$$W = \{ (x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 \mid x + z - t = y + z + u = 0 \}$$

(i) Determinare una base di W e di W^\perp .

(ii) Determinare una base ortogonale di W e di W^\perp .

(iii) Determinare una base ortonormale di W e di W^\perp .

Esercizio 27. Determinare una base ortonormale del sottospazio W di \mathbb{R}^4 definito dall'equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Completare la base ortonormale trovata per W ad una base ortonormale di \mathbb{R}^4 . Determinare la proiezione ortogonale del vettore $u = (1, 2, 0, 1)$ su W .

Esercizio 28. Siano dati in \mathbb{R}^4 i vettori

$$u_1 = (1, 1, 1, 1) \quad u_2 = (-3, 1, 1, 1) \quad u_3 = (0, 1, 1, -2)$$

Verificare che u_1, u_2, u_3 sono a due a due ortogonali. Trovare poi un vettore $u_4 \in \mathbb{R}^4$ di norma $\sqrt{2}$, formante un angolo acuto con $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ e tale che $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ sia una base ortogonale di \mathbb{R}^4 .

Esercizio 29. Costruire una matrice ortogonale di ordine 2 che contiene la riga $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$.

$$[M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}]$$

Esercizio 30. Costruire una matrice ortogonale di ordine 3 che contiene la colonna $(\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}})$.

$$[\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}]$$

Esercizio 31. Siano A e B due matrici ortogonali. Provare che anche AB è una matrice ortogonale.