Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.16 – Teorema spettrale

Esercizio 1. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(i) Scrivere l'espressione generale di F. $[\,F(x,y) = (2x+3y, 3x-2y)\,]$

(ii) Usando la definizione data, verificare che F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ di suoi autovettori.

[autovalori $\lambda = \pm\sqrt{13}$, $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{26-4\sqrt{13}}}(2-\sqrt{13},3),\ \frac{1}{\sqrt{26+4\sqrt{13}}}(2+\sqrt{13},3) \right\}$]

(iv) Determinare, se esistono, una base ortonormale di $\operatorname{Ker} F$ e di $\operatorname{Im} F$.

[F è invertibile, allora il nucleo è banale e l'immagine ha per base quella canonica.]

Esercizio 2. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(i) Scrivere l'espressione generale di F.

$[\,F(x,y,z) = (2x+3y+2z,\ 3x-2y+3z,\ 2x+3y+2z)]$

(ii) Usando la definizione data, verificare che F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ di autovettori per F.

[autovalori $\lambda = 0, 1 \pm 3\sqrt{3}$,

$\mathcal{B} = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ (\frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}, \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}),\ (\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}, \frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}) \right\}$]

(iv) Determinare, se esistono, una base ortonormale di $\operatorname{Ker} F$ e di $\operatorname{Im} F$.

[il primo vettore di $\mathcal{B}$ dà una base ortonormale del nucleo, i rimanenti due dell'immagine]

Esercizio 3. Costruire, se possibile, un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^2$ con autovalori 1 e -2 e che abbia come autospazi ad essi associati i sottospazi generati rispettivamente da $(1,-1)$ e $(2,0)$.

[non è possibile poiché i due vettori non sono ortogonali]

Esercizio 4. Costruire, se esiste, un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^2$ con autovalori 1 e -2 e che abbia come autospazi ad essi associati i sottospazi generati rispettivamente da $(1,-1)$ e $(2,2)$.

$[\,F(x,y) = (-\frac{x}{2} - \frac{3y}{2}, -\frac{3x}{2} - \frac{y}{2})]$

Esercizio 5. Costruire, se esiste, un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^3$ con autovalori -1 e 3 e che abbia come autospazi ad essi associati rispettivamente $\mathcal{L}((2,2,2))$ e $\mathcal{L}((1,-1,0),(2,-1,3))$.

[non esiste poiché i due spazi non sono ortogonali]

Esercizio 6. Costruire, se esiste, un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^3$ con autovalori 1 e -1 e che abbia come autospazi ad essi associati rispettivamente $\mathcal{L}((2,2,2))$ e $\mathcal{L}((1,-1,0),(0,-2,2))$.

Esercizio 7. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(x,y) = (2x-y, -x+2y).$$

(i) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica.

(ii) Verificare che F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ di suoi autovettori.

Esercizio 8. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(x,y) = (2x - y + 2z,\ -x - 2y + z,\ 2x + y + 2z).$$

(i) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica.

(ii) Verificare che F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di suoi autovettori.

(iv) Determinare, se esistono, una base ortonormale di $\operatorname{Ker} F$ e di $\operatorname{Im} F$.

Esercizio 9. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(i) Calcolare $F(x,y,z,t)$, al variare di $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

(ii) Stabilire se F è un endomorfismo simmetrico.

(iii) Diagonalizzare F rispetto ad una base ortonormale di suoi autovettori.

(iv) Determinare, se esistono, una base ortonormale di $\operatorname{Ker} F$ e di $\operatorname{Im} F$.

Esercizio 10. Sia W un sottospazio vettoriale non banale di $\mathbb{R}^n$ e sia $W^\perp$ il suo complemento ortogonale. È noto che ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ può essere scritto come $v = w + w'$, dove $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. Ha senso allora definire l'applicazione $P_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, detta la proiezione ortogonale da $\mathbb{R}^n$ su W, tale che $P_W(v) = w$. Dimostrare che P_W è un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$. Determinare inoltre $\operatorname{Im} P_W$ e $\operatorname{Ker} P_W$ e dire se sono spazi complementari.

Esercizio 11. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare, se possibile, una matrice ortogonale C ed una matrice diagonale D tali che $D = C^T A C$.

Esercizio 12. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare, se possibile, una matrice ortogonale C ed una matrice diagonale D tali che $D = C^T A C$.

Esercizio 13. Sia $W = L((1,1,0,1),(0,0,0,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$. Determinare una base di $W^\perp$. Scrivere la matrice canonica A associata alla proiezione ortogonale $P_W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di $\mathbb{R}^4$ su W. Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, diagonalizzarla rispetto ad una base di autovettori.

Esercizio 14. Sia dato $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0\}$.

(i) Trovare una base ortonormale di U.

(ii) Determinare $U^\perp$ e fornire sue equazioni cartesiane e parametriche.

(iii) Determinare la proiezione ortogonale di $(1,-2,-1)$ su U.

(iv) Decomporre il vettore $(1,2,1)$ secondo U e $U^\perp$.

(v) Trovare, se possibile, un endomorfismo simmetrico che ha U e $U^\perp$ come autospazi associati rispettivamente agli autovalori 0 e -1.

Esercizio 15. Si considerino i vettori $v_1 = (1,2,0,0)$ e $v_2 = (-1,0,0,1)$ di $\mathbb{R}^4$. Si definiscano $W_1 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot v_1 = 0\}$ e $W_2 = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \cdot v_2 = 0\}$.

(i) Determinare una base ortonormale e la dimensione di W_1 e di W_2.

(ii) Determinare una base ortonormale e la dimensione di $W_1^\perp$ e di $W_2^\perp$.

(iii) Stabilire se W_1 e W_2 sono a somma diretta.

(iv) Determinare una base ortonormale e la dimensione di $W_1 + W_2$ e di $W_1 \cap W_2$.

(v) Determinare la proiezione ortogonale del vettore v_1 su W_1, W_2, $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$

(vi) Stabilire se esiste un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^4$ che abbia W_1 e W_2 come autospazi.

Esercizio 16. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che $f(x, y, z) = (x - z, 0, z - x)$.

(i) Verificare che f è simmetrico.

(ii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori di f.

(iii) Calcolare la dimensione di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)^\perp$.

Esercizio 17. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo tale che $f(x, y, z, t) = (x, y + z, y + z, t)$.

(i) Verificare che f è simmetrico.

(ii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ di autovettori di f.

(iii) Calcolare la dimensione ed una base di $\mathrm{Ker}(f)^\perp$ e di $\mathrm{Im}(f)^\perp$.

Esercizio 18. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo tale che

$$f(e_1) = 2e_1 + 2e_3, \quad f(e_2) = 4e_2, \quad f(e_3) = 2e_1 + 2e_3, \quad f(e_4) = 4e_4,$$

dove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

(i) Verificare che f è simmetrico.

(ii) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ di autovettori di f.

(iii) Calcolare la dimensione ed una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)^\perp$.

(iv) Stabilire se $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$ sono a somma diretta.