

Sapienza Università di Roma - Corso di laurea in Ingegneria Energetica
Geometria - A.A. 2018-2019
Foglio n.17 – Forme quadratiche

Esercizio 1. Per ciascuna delle forme quadratiche su \mathbb{R}^3 seguenti calcolare la forma polare, una base diagonalizzante di Sylvester, rango e segnatura:

(i) $Q(x, y, z) = xz + xy + yz$

$$[b((x, y, z), (x', y', z')) = \frac{1}{2}xz' + \frac{1}{2}x'z + \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{2}x'y + \frac{1}{2}yz' + \frac{1}{2}y'z, \text{rk } Q = 3, \text{sgn } Q = (1, 2), \mathcal{B} = \{ (1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 1, -1) \}]$$

(ii) $Q(x, y, z) = 2xz - 2xy - 2yz$

(iii) $Q(x, y, z) = x^2 - 2xz - y^2 - z^2$

(iv) $Q(x, y, z) = -x^2 - 4xy + 3y^2 + 2z^2$

(v) $Q(x, y, z) = 5x^2 + 3y^2 + xz$

$$[b((x, y, z), (x', y', z')) = 5xx' + 3yy' + \frac{1}{2}xz' + \frac{1}{2}x'z \text{ rk } Q = 3, \text{sgn } Q = (3, 0), \mathcal{B} = \{ (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{10}{\sqrt{5}}) \}]$$

(vi) $Q(x, y, z) = 6xy$

$$[b((x, y, z), (x', y', z')) = 3xy' + 3x'y, \text{rk } Q = 2, \text{sgn } Q = (1, -1), \mathcal{B} = \{ (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0), (0, 0, 1) \}]$$

Esercizio 2. Classificare le forme quadratiche dell'esercizio precedente (dire se sono indefinite, definite positive etc.).

[(i) indefinita, (ii) indefinita, (iii) indefinita, (iv) indefinita, (v) definita positiva, (vi) indefinita]

Esercizio 3. Data la matrice A , trovare una matrice invertibile M tale che $M^T A M$ sia la forma canonica di Sylvester di A e calcolare la segnatura di A :

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ [sgn $A = (1, 1)$]

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ [$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, sgn $A = (1, 0)$]

(iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ [sgn $A = (3, 0)$]

(iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ [$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$, sgn $A = (3, 0)$]

Esercizio 4. Classificare le matrici dell'esercizio precedente (dire se sono indefinite, definite positive etc.).

[(i) indefinita, (ii) semidefinita positiva, (iii) definita positiva, (iv) definita positiva]

Esercizio 5. Individuare tra le seguenti matrici quelle definite positive utilizzando il criterio dei minori principali:

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(ii) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad [definita\ positiva]$$

$$(iv) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(v) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(vi) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. Al variare di k in \mathbb{R} , calcolare la segnatura della matrice: $\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$. Classificare il suo tipo al variare di k .

[Il determinante della matrice vale $k^3 - k$. Il rango è tre per $k \neq 0, 1, -1$, due in caso contrario. La matrice va diagonalizzata caso per caso per poter leggerne la segnatura. Sia $k \neq 0, 1, -1$. Allora come due vettori non isotropi ortogonali prendiamo subito e_1 ed e_2 , leggendo dalla matrice.

Abbiamo che $Q(e_1) = Q(e_2) = k$. Cerchiamo ora $\mathcal{L}(e_1, e_2)^\perp$. Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} kx + z = 0 \\ ky = 0, \end{cases} \quad \text{troviamo il terzo vettore } v_3 = (1, 0, -k), \text{ con } Q(v_3) = k^3 - k \neq 0. \text{ Passiamo ora alla}$$

segnatura: se $k < -1$, $\text{sgn } Q = (0, 3)$ (definita negativa); per $-1 < k < 0$, $\text{sgn } Q = (1, 2)$ (indefinita); se $0 < k < 1$, $\text{sgn } Q = (2, 1)$, (indefinita); infine, se $k > 1$, $\text{sgn } Q = (3, 0)$ (definita positiva). Se $k = 0$, la

matrice diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango due. Leggendo tale matrice si trova facilmente la base

diagonalizzante $\{e_1 + e_3, e_1 - e_3, e_2\}$. La segnatura è $\text{sgn } Q = (1, 1)$ e Q è indefinita. Se $k = 1$, la

matrice diventa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per brevità leggiamo subito che e_1 ed e_2 sono ortogonali, quindi

indipendentemente da chi scegliamo come terzo vettore (isotropo) per completare la base, la segnatura è $\text{sgn } Q = (2, 0)$, quindi Q è semidefinita positiva. Ad ultimo, per $k = -1$, la matrice

diventa: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Come nel caso precedente troviamo che $\text{sgn } Q = (0, 2)$ e che Q è

semidefinita negativa.]

Esercizio 7. Al variare di k in \mathbb{R} , calcolare la segnatura della matrice: $\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$. Per $k = 3$ trovare una matrice invertibile M tale che $M^T A M$ sia la forma canonica di Sylvester di A .

Esercizio 8. Al variare di k in \mathbb{R} , calcolare la segnatura della matrice: $\begin{pmatrix} 2k & 0 & 1-k \\ 0 & k & 0 \\ 1-k & 0 & 2k \end{pmatrix}$. Per quali valori di k essa risulta definita positiva?