Sapienza Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Analisi Matematica II - A.A. 2016-2017 – prof. Cigliola
Foglio n.17 – Integrali di superficie

Esercizio 1. Si calcoli l'area della porzione di superficie del paraboloide di rotazione $z = x^2 + y^2$, con $0 \leqslant z \leqslant 2$. $[\frac{13\pi}{3}]$

Esercizio 2. Si calcoli l'area della superficie laterale di un cilindro e di un cono di altezza h e raggio di base r.

Esercizio 3. Si calcoli l'area della superficie (toro) di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = (2 - \cos v) \cos u \\ y = (2 - \cos v) \sin u \\ z = \sin v \end{cases}$$

dove $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$ e $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. $[8\pi^2]$

Esercizio 4. Si calcoli l'area della superficie dell'elicoide:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = 3\theta \end{cases}$$

dove $0 < \rho \leqslant 1$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Si verifichi che le sezioni cilindriche di raggio minore di 1 dell'elicoide sono delle eliche. $[\pi\sqrt{10} + 9\pi \operatorname{arcsinh}(1/3)]$

Esercizio 5. Sia V il solido definito da

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 5 - 2x\right\}.$$

(i) Si calcoli il volume di V. $[10\pi]$

(ii) Si calcoli l'area della superficie di V. $[(10\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 2)\pi]$

Esercizio 6. Calcolare l'integrale di superficie:

$$\int_S x^3 e^z \, d\sigma,$$

dove S è la porzione della superficie del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 4$, delimitata dai piani $z = 0$ e $z = 3$ e contenuta nel semispazio $x \geqslant 0$. $[0]$

Esercizio 7. Calcolare l'integrale di superficie:

$$\int_S (x^2 + y^2) \, d\sigma,$$

dove S è la superficie sferica di centro l'origine e raggio $r > 0$. $[\frac{8\pi r^4}{3}]$

Esercizio 8. Calcolare l'integrale di superficie:

$$\int_S (x^2 + y^2 + 1) \, d\sigma,$$

dove S è la porzione del grafico di $g(x, y) = xy$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 8$. $[\frac{484\pi}{5}]$

Esercizio 9. Calcolare il baricentro della superficie della semiellisse di semiassi a e b, prima tagliata rispetto all'asse maggiore e poi rispetto all'asse minore.

Esercizio 10. Calcolare il baricentro della parte di superficie del paraboloide ellittico di rotazione $z = x^2 + y^2$ che si proietta sul cerchio di centro l'origine e raggio 2.

Esercizio 11. Dopo aver calcolato il baricentro della semicirconferenza di raggio r, del semicerchio di raggio r, della superficie semisferica di raggio r e della calotta semisferica di raggio r, si confrontino i risultati ottenuti e se ne dia una interpretazione geometrica.

Esercizio 12. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$B(x,y,z) = (0,0,-z)$$

uscente dalla sfera

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}\,.$$

[Osserviamo che $\operatorname{div} B(x,y,z) = -1$. La frontiera di A è la superficie sferica di raggio 1 . Quindi usando il Teorema della Divergenza, si ha che il flusso del campo vettoriale B è $\iint_{\partial A} \langle B, \nu_A\rangle \, d\sigma = \iiint_A -1 dxdydz = -\frac{4}{3}\pi$, dove abbiamo usato che il volume della sfera unitaria è $\frac{4}{3}\pi$.]

Esercizio 13. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$B(x,y,z) = (2x^3, 2y^3, 2z^3)$$

uscente dal guscio sferico

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 25\}\,.$$

[Osserviamo che $\operatorname{div} B(x,y,z) = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2$ e che la frontiera di A è l'unione delle due superfici sferiche di raggio 3 e 5 $\partial A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$ Quindi usando il Teorema della Divergenza e le coordinate sferiche, si ha che il flusso del campo vettoriale B è $\iint_{\partial A} \langle B, \nu_A\rangle \, d\sigma = \iiint_A \operatorname{div} B \, dx\, dy\, dz = \iiint_A 6(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = 2\pi \int_0^\pi \int_3^5 6\rho^2\rho^2 \operatorname{sen}\theta \, d\rho\, d\theta = 24\pi \int_3^5 \rho^4 d\rho = 24\pi \left(625 - \frac{243}{5}\right) = \frac{69168}{5}\pi$]

Esercizio 14. Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale

$$B(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$

sul bordo dalla superficie del paraboloide

$$\Sigma = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \le 2\}\,.$$

[Essendo il campo B un campo conservativo (una sua primitiva è $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$) si ha $\operatorname{rot} B = (0,0,0)$ e quindi dal Teorema di Stokes si ha $\oint_{\partial^+\Sigma} 2x\, dx + 2y\, dy + 2z\, dz = 0$.]

Esercizio 15. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$B(x,y) = (x,y)$$

uscente dal dominio

$$A = \{(x,y) : x^2 \le y \le 1, x \ge 0\}\,.$$

[−4/3]

Esercizio 16. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$B(x,y) = (x^2, y^2)$$

uscente dal semicerchio

$$A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 3, x \geq 0\}.$$

Esercizio 17. Si calcoli il flusso del campo vettoriale

$$B(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$$

uscente dalla semisfera

$$A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \geq 0\}.$$

$[128\pi]$

Esercizio 18. Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale

$$B(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$$

sul bordo dalla superficie semisferica

$$A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0\}.$$

$[0]$

Esercizio 19. Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale

$$B(x,y,z) = (y, 0, 0)$$

sul bordo dalla superficie semisferica

$$A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x \geq 0\}.$$

$[0]$

Esercizio 20. Calcolare l'integrale di superficie $\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{z^4} d\sigma$ sulla superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1 \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

Trovare inoltre il piano tangente a Σ nel suo punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$.

$[\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2} - \frac{16}{64}\sqrt{17})]$

Esercizio 21. Calcolare l'integrale di superficie $\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2) d\sigma$ sulla superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$$

Trovare inoltre il piano tangente a Σ nel suo punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

$[\frac{\sqrt{2}}{2}\pi]$

Esercizio 22. Utilizzando il teorema di Stokes calcolare il seguente integrale di superficie:

$$\int_{\partial\Sigma^+} (x^2 + y)dx + z\,dy + y\,dz$$

dove

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$

$[-\pi]$

Utilizzando i teoremi di Guldino, si risolvano i seguenti esercizi.

Esercizio 23. Si calcoli il volume della porzione del paraboloide di rotazione $z = x^2 + y^2$, con $0 \leqslant z \leqslant 2$. $[\mathcal{V} = 2\pi]$

Esercizio 24. Si calcolino il volume e l'area della superficie laterale di un cilindro e di un cono di altezza h e raggio di base r.

Esercizio 25. Si calcolino il volume e l'area della superficie laterale di un tronco di cono di altezza h e raggi di base r ed R.

Esercizio 26. Si calcolino il volume e l'area della superficie del solido definito da

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 5\right\}.$$

Esercizio 27. Si calcolino l'area della superficie ed il volume di una sfera di raggio r.

Esercizio 28. Si calcolino l'area della superficie ed il volume del toro, della sfera, della semisfera, del cilindro, del cono retto.