Sapienza Università di Roma – Corso di laurea in Ingegneria Elettrotecnica
Geometria - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Foglio n.17 – Prodotto vettoriale

Esercizio 1. Siano dati $a \in \mathbb{R}$ ed i vettori $u = \vec{\imath} + (a-1)\vec{\jmath} + (a+1)\vec{k}$, $v = a\vec{\imath} + 2a\vec{\jmath} + \vec{k}$ e $w = 2\vec{\imath} + (a+3)\vec{\jmath} + 2a\vec{k}$ di $\mathbb{R}^3$. Determinare i valori di a per cui:

(i) u è parallelo a $3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 3\vec{k}$;

[Deve essere $\begin{cases} 1 = 3\lambda \\ a-1 = -3\lambda, \\ a+1 = 3\lambda \end{cases}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Si trova $\lambda = 1/3$ ed $a = 0$.]

(ii) w è parallelo a $\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$; [a=2]

(iii) $\|u\| = 2$; [$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$]

(iv) $u // v$; [per nessun valore di a]

(v) $u \perp v$; [per nessun valore di a]

(vi) u, v e w è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$; [per nessun valore di a]

(vii) $v \wedge w = \vec{0}$; [$a = 1$]

(viii) $v \wedge w$ è parallelo a $18\vec{\imath} - 18\vec{\jmath} + 54\vec{k}$;

(ix) v è complanare con $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ e $\vec{\jmath} + \vec{k}$;

(x) $u \wedge v \cdot w = 0$. [$a = 1$, $a = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$]

Esercizio 2. Siano v e w due vettori di $\mathbb{R}^2$. Si supponga che $v \wedge w \cdot u = 0$, per ogni $u \in \mathbb{R}^2$. Cosa si può dedurre su v e w?

[Per ogni $u \in \mathbb{R}^3$, il vettore $v \wedge w$ è ortogonale a u. L'unica possibilità è che $v \wedge w$ sia il vettore nullo. Pertanto v e w sono linearmente dipendenti, ovvero proporzionali]

Esercizio 3. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il vettore $v = (2, 1, -1)$. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ad ogni $u \in \mathbb{R}^3$ associa $F(u) = u \wedge v$.

(i) Dimostrare che F è un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.

[segue dal fatto che il prodotto vettoriale è un'operazione che rispetta la somma tra vettori ed il prodotto con scalare reale]

(ii) Stabilire se F è simmetrico.

[No. Per costruire un preciso controesempio, si osservi che dati due vettori v e w, da un lato si ha che $F(v) \cdot w = u \wedge v \cdot w$, mentre $v \cdot F(w) = v \cdot u \wedge w$. Tali due numeri reali, se non nulli, sono l'uno l'opposto dell'altro, per via delle proprietà dei determinanti.]

(iii) Determinare se F è un automorfismo e calcolare $\operatorname{Ker} F$ ed $\operatorname{Im} F$.

[F non è invertibile, infatti $F(u) = u \wedge u = \mathbf{0}$. Inoltre un vettore v è nel nucleo di F se e solo se $F(v) = u \wedge v = \mathbf{0}$, se e solo se v è proporzionale ad u. Allora $\operatorname{Ker} F = \mathcal{L}(u)$. Per quanto riguarda l'immagine di F osserviamo preliminarmente che $\operatorname{Im} F \subset u^{\perp}$, poiché il prodotto vettoriale produce vettori che sono ortogonali ad i vettori che sono stati moltiplicati. Inoltre, sappiamo che $\dim \operatorname{Im} F = 2$, per il teorema del rango, e che $\dim u^{\perp} = 2$, per il teorema di Fourier. Ne segue che $\operatorname{Im} F = u^{\perp}$, avendo essi la stessa dimensione.]

(iv) Trovare autovalori e autospazi di F e stabilire se esso è diagonalizzabile.

[Sia λ autovalore di F. Allora $F(v) = \lambda v = u \wedge v$. Ne segue che il vettore $F(v)$ è sia parallelo che ortogonale a v, non può allora che essere nullo. Sicché l'unico autovalore di F è quello nullo, ed essendo F un'applicazione non nulla, non può essere diagonalizzabile.]

Esercizio 4. Sia dato in $\mathbb{R}^4$ il vettore $v = (-2, -1, 1, 2)$. Si consideri l'applicazione $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ che ad ogni $u \in \mathbb{R}^4$ associa $F(u) = u \cdot v$.

(i) Dimostrare che F è un'applicazione lineare.

[Segue dalle proprietà di bilinearità del prodotto scalare.]

(ii) Calcolare $\operatorname{Ker} F$ ed $\operatorname{Im} F$.

[$\operatorname{Ker} F$ è l'insieme dei vettori ortogonali a v, l'immagine invece coincide con $\mathbb{R}$.]

Esercizio 5. Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ $u = (1, 1, 0)$ e $v = (2, -1, 1)$. Risolvere l'equazione vettoriale $u \wedge x = u \wedge v$ ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto.

[Se $u \wedge x = u \wedge v$, abbiamo anche che $u \wedge (x - v) = \mathbf{0}$. Pertanto i vettori u e $x - v$ sono proporzionali: $x = \lambda u + v$.]

Esercizio 6. Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^3$ $u = (1, 1, 0)$ e $v = (2, -1, 1)$. Risolvere l'equazione vettoriale $u \wedge x = v \wedge 2u$.

[Come sopra osservando però che $u \wedge x = v \wedge 2u = -2u \wedge v = u \wedge (-2v)$. Quindi $x = \lambda u + 2v$.]

Esercizio 7. Sia $a \in \mathbb{R}$ e siano $u = (a, 1, -2)$, $v = (1, 0, -1)$, $w = (2, -1, 3)$ e $t = (1, 0, 2)$. Per quali valori di a il vettore t è ortogonale a $\|u\| v \wedge w - (u \cdot u) u \wedge w$?

Esercizio 8. Siano u, v e w vettori non complanari di $\mathbb{R}^3$. Calcolare la dimensione dei sottospazi generati da:

(i) $S = \{\, u,\ v,\ (u \wedge v \cdot w) w \,\}$;

[Se u, v e w non sono complanari, il loro prodotto misto è non nullo. Allora otteniamo una nuova base di $\mathbb{R}^3$: $\dim S = 3$]

(ii) $S = \{\, u,\ v,\ (u + v) \wedge (u - v) \,\}$;

[$\dim S = 3$. Anzitutto u e v sono indipendenti per ipotesi. Si ha poi che $(u + v) \wedge (u - v) = 2v \wedge u$, che è ortogonale ad entrambi u e v. Allora è linearmente indipendente da questi.]

(iii) $S = \{\, u,\ u + v,\ u \wedge (u + v) \,\}$;

[$\dim S = 3$. Per ipotesi u e v sono indipendenti. Allora $u+v$ è indipendente da u. Il vettore $u \wedge (u+v)$ è ortogonale sia ad u che a v, allora è indipendente da entrambi.]

(iv) $S = \{\, u + (u \wedge v),\ v + (u \wedge v),\ u - v \,\}$;

[$\dim S = 2$. Il terzo vettore è differenza dei primi due che sono tra loro linearmente indipendenti.]

(v) $S = \{\, u,\ -3v,\ (v \cdot w)w \,\}$;

[$2 \leqslant \dim S \leqslant 3$. I primi due sono indipendenti. Il terzo può essere nullo se v e w vengono scelti ortogonali.]

(vi) $S = \{\, u \wedge v,\ u \wedge w,\ w \wedge v \,\}$.

[Procediamo col metodi degli scarti successivi. Siccome per ipotesi vettori u e v sono linearmente indipendenti, $u \wedge v \neq \mathbf{0}$. Supponiamo ora che $u \wedge v = \lambda(u \wedge w)$. Allora $u \wedge v - u \wedge (\lambda w) = u \wedge (v - \lambda w) = \mathbf{0}$. Ciò accade se e solo se u è multiplo di $v - \lambda w$, il che equivale a dire che u è linearmente dipendente da v e w, contrariamente all'ipotesi. Infine, sia $u \wedge v = \lambda(u \wedge w) + \mu(w \wedge v) = (\lambda u) \wedge w + (-\mu v) \wedge w = (\lambda u - \mu v) \wedge w$. Ne deduciamo che il vettore $u \wedge v$ è ortogonale oltre che a u e v, anche a w. Non può che essere il vettore nullo. Ma questo contraddice l'ipotesi per cui u e v sono linearmente indipendenti. Dunque $\dim S = 3$.]

Esercizio 9. Ripetere l'esercizio precedente nell'ipotesi che $\{u, v, w\}$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

[(i) Se u, v e w costituiscono una base ortonormale il loro prodotto misto vale 1. Allora facilmente $\dim S = 3$.
(ii), (iii), (iv) Come nell'Esercizio precedente. Come nell'Esercizio precedente.
(v) $\dim S = 2$ perché per ipotesi il vettore w è ortogonale a v.
(vi) Come nell'Esercizio precedente o si osservi che lavorando con una base ortonormale, necessariamente $u \wedge v = \pm w$, $u \wedge w = \pm v$ e infine $w \wedge v = \pm u$.]

Esercizio 10. Rappresentare graficamente il quadrilatero $ABCD$ di vertici

$$A(5,2) \quad B(-2,5) \quad C(-4,-3) \quad D(-1,2).$$

Calcolarne l'area e il perimetro.

Esercizio 11. Sia D il punto in cui la retta $r:\ 2x - 3y + 2 = 0$ interseca la retta passante per $A(-3,2)$ e $B(1,-2)$. Condurre da D la retta s perpendicolare ad $\overrightarrow{AB}$ e sia C il punto in cui si intersecano s e la retta per B parallela all'asse y. Calcolare l'area del triangolo ABC.

Esercizio 12. Dimostrare che quattro punti A, B, C, D sono complanari se e solo se

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = 0$$

[Suggerimento: tale prodotto misto dà il volume del parallelepipedo sotteso ai vertici A, B, C, D.]

Esercizio 13. Calcolare il volume di un parallelepipedo retto di dimensioni a, b e c utilizzando la nozione di prodotto misto. [$V = abc$]